Étude asymptotique des anneaux filtrés

LACOURCELLE Hélie & LE LOUEDEC Mathieu & SAIDI Youssef & YAO Huaizhen & YE Xiaowei, sous la direction de FINSKI Siahrei

École Polytechnique

07/05/2025

Structure de la présentation

Définition

Soit A un anneau commutatif, une **filtration** sur A est une application $f : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

- $f(x+y) \geqslant \min(f(x), f(y))$ pour tout $x, y \in A$;
- $f(xy) \geqslant f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in A$.

Exemple : ordre d'annulation en 0

$$\operatorname{ord}_0(f) = n \iff f(z) = z^n \tilde{f}(z), \tilde{f}(0) \neq 0.$$

Définition

Une **valuation** est une filtration v positive telle que $v(xy) = v(x) + v(y)$.

Exemple

- La filtration induite par un idéal I de A :

$$f_I(x) := \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} : x \in I^n\}.$$

- f, g filtrations $\implies \min(f, g)$ filtration.
- $A = \mathbb{C}[X, Y]$. Pour un polynôme $P \in A$, on l'écrit en suite formelle

$$P(t, e^t) = \sum_{i \geqslant 0} a_i(P) t^i.$$

  $v(P) :=$ l'indice minimal i telle que $a_i(P) \neq 0$.
- v_1, v_2 valuations, $\min(v_1, v_2)$ n'est pas une valuation en général.

Fonction de Samuel

Définition

Pour une filtration f, on a la **fonction de Samuel**

$$f^{\mathrm{hom}} := \lim_{n\to\infty} \frac{f(x^n)}{n}.$$

bien définie (Lemme de Fekete) et homogène ($f(x^n) = nf(x)$).

Conjecture (P. Samuel)

Soit A un anneau Noethérien et I un idéal de A, alors

$$f_I^{\mathrm{hom}}(x) \in \mathbb{Q}, \forall x \in A.$$

Réponse : Oui ! Rees en 1956 et Nagata en 1957.

Théorème de Rees

Théorème (Rees 1956)

Soient A un anneau noethérien et f une filtration noethérienne sur A. Alors il existe $r \in \mathbb{N}, e_1, \cdots, e_r \in \mathbb{Z}$ et les valuations $V_1, \cdots, V_r$ à valeur dans $\mathbb{Z}$, tels que

$$f^{\text{hom}}(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant r} \left(\frac{V_i}{e_i} \right).$$

Corollaire (Conjecture de Samuel)

$f_I^{\text{hom}}(x)$ *est donc bien rationnel* $\forall x \in A$.

Noethérienité

Définition (Anneau Noethérien)

A est dit **Noethérien** si tout idéal de A est de type fini, ou de manière équivalente, toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire.

Exemple

- A Noethérien $\implies$ $A[X]$ Noethérien (Théorème de base de Hilbert)
- l'anneau des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$ n'est pas Noethérien

Aspect Géométrique : dualité d'Isbell

$$
\begin{aligned}
\text{idéal de } \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n] &\longleftrightarrow \text{l'ensemble algébrique} \\
I &\longleftrightarrow V(I) := \{z \in \mathbb{C}^n : \forall f \in I, f(z) = 0\} \\
\text{idéal premier} &\longleftrightarrow \text{espace irréductible} \\
\text{suite croissante d'idéaux} &\longleftrightarrow \text{suite décroissante d'ensembles algébriques} \\
\text{Noethérienité} &\longleftrightarrow \text{"Théorème des fermés emboîtés"}
\end{aligned}
$$

Filtation Noethérienne

Définition

Soit f une filtration sur A. On définit

$$G(f) = \{\sum_{n=p}^{q} x_n X^n : p, q \in \mathbb{Z}, \text{ et } f(x_n) \geqslant n \text{ pour } n = p, \ldots, q\},$$

On dit que f est une filtration **Noethérienne** si $G(f)$ est Noethérien.

Lemme

Soient A un anneau Noethérien et I un idéal de A, alors f_I est Noethérienne.

Stratégie de la preuve

- Outil principal : clôture intégrale
- Pour plus de simplicité, on se restreint sur le cas d'un anneau intègre
- Étape I : théorème de Mori-Nagata
- Étape II : se ramener au cas d'une filtration induite par un idéal, lui même réduit au cas d'un idéal principal

Clôture Intégrale d'une filtration

Définition (Outil principal : Clôture Intégrale)

On définit la clôture intégrale de f, notée f^*, comme suivant

$$f^*(x) = \max\{m : \exists a_1, \cdots, a_n \in A, f(a_i) \geqslant im, \sum_{i=1}^{n} a_n x^{n-i} + x^n = 0\}$$

Proposition

f^* est une filtration

Lemme

$\lfloor f(x) \rfloor \leqslant f^*(x) = \lfloor f^{\text{hom}}(x) \rfloor.$

Étape I : Théorème de Mori-Nagata

Théorème

Soit A un anneau intègre noethérien, soit k son corps des fractions. Alors il existe une famille de valuation sur k à valeur entière $v : k \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$

- *Si $x \in A \backslash \{0\}$, alors $v(x) \neq 0$ seulement pour un nombre fini de v parmis ces applications ;*
- *Si $x \in k$ alors x est entier sur A si et seulement si $v(x) \geqslant 0$ pour toutes ces applications.*

$x \in k$ entier sur A : racine d'un polynôme unitaire.
$v|_A$ est une valuation sur A.

Étape II : Réduire aux filtrations principales

Définition

Un idéal est dite principal s'il est engendré par un seul élément : $I = (a)$.

Exemple

- Dans $\mathbb{C}[X]$, l'idéal $I := \{P \in \mathbb{C}[X] : P(0) = 0\}$ est principal engendré par P.
- Dans $\mathbb{C}[X, Y]$, l'idéal $I := \{P \in \mathbb{C}[X, Y] : P(0, 0) = 0\}$ n'est pas principal.

Filtration principale

Définition

Soient A_0 un anneau noethérien intègre. Soit $A = A_{0(a)} := \{\frac{a_0}{a^n} : a_0 \in A_0, n \in \mathbb{N}\}$. Soit a un élément non-nul de A_0. Soit $x \in A$. On note

$$f_a(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, x \in a^n A\}$$

Alors f_a est une filtration sur A et on l'appelle **filtration principale**.

Le lemme clé

Lemme

Soit A_0 *un anneau noethérien intègre, soit* u *un élément non-nul de* A_0*. Soit* $A = A_{0(u)}$*. Notons* f_u *la filtration principale définie sur* A *par* u, A_0*. Soient* $V_1, ..., V_k$ *les valuations données par le théorème de Mori-Nagata telles que pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}, V_i(u) > 0$*. Alors, si* $x \in A$ *:*

1. $f_u^*(x) \geqslant n \iff \forall i, V_i(x) \geqslant nV_i(u)$;
2. $f_u^{\mathrm{hom}}(x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{V_i(x)}{V_i(u)}$.

Démonstration du cas intègre et principal

Démonstration : Par définition de f_u^* :

$$f_u^*(x) \geqslant n \iff \exists r, \exists a_1, \ldots, a_r \in A_0, x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r = 0$$

avec $f_u(a_i) \geqslant ni$ pour tout i. En multipliant par u^{-nr} :

$$(u^{-n}x)^r + u^{-n}a_1(u^{-n}x)^{r-1} + \cdots + u^{-nr}a_r = 0$$

et donc que c'est équivalent à dire que $u^{-n}x$ est entier sur A_0^*. En effet le coefficient devant $(u^{-n}x)^i$ est $a_i u^{-ni}$ qui est bien dans A_0 puisque $f_u(a_i u^{-ni}) \geqslant ni - ni \geqslant 0$. Ceci est équivalent à dire que $\forall i \in \{1 \ldots, k\}, V_i(u^{-n}x) \geqslant 0$ ou $\forall i \in \{1 \ldots, k\}, V_i(x) \geqslant nV_i(u)$, ce qui prouve le premier point. Réécrivons ce que nous venons de montrer sous la forme

$$f_u^*(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \left\lfloor \frac{V_i(x)}{V_i(u)} \right\rfloor$$

Démonstration

Soit $g(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{V_i(x)}{V_i(u)}$. Montrons par double inégalité que $g = f_u^{\mathrm{hom}}(x)$.
g est une filtration homogène et $g(x) \geqslant f_u^*(x) \geqslant f_u(x)$, donc
$g(x) \geqslant f_u^{\mathrm{hom}}(x)$.
Pour l'autre côté, choisissons n un multiple des entiers $V_i(u)$. Alors

$$f_u^*(x^n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{nV_i(x)}{V_i(u)}$$

car cette fraction est un entier. Donc,

$$f_u^{\mathrm{hom}}(x^n) \geqslant f_u^*(x^n) = n \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{V_i(x)}{V_i(u)} = ng(x)$$

et comme f_u^{hom} est homogène on a $f_u^{\mathrm{hom}}(x) \geqslant g(x)$, ce qui conclut.

Lemme

1. $f_u^*(x) \geqslant n \iff \forall i, V_i(x) \geqslant nV_i(u)$;
2. $f_u^{\hom}(x) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \frac{V_i(x)}{V_i(u)}$.

Théorème (Rees 1956)

Soient A un anneau noethérien et f une filtration noethérienne sur A. Alors il existe $r \in \mathbb{N}, e_1, \cdots, e_r \in \mathbb{Z}$ et les valuations $V_1, \cdots, V_r$ à valeur dans $\mathbb{Z}$, tels que

$$f^{\hom}(x) = \min_{1\leqslant i\leqslant r} \left(\frac{V_i}{e_i}\right).$$

Remerciement et Q&A

Merci pour votre écoute !

Toutes les questions seront bienvenues !