Travaux Dirigés d'Analyse IV

Classe sino-française, USTC

Responsables du cours :

Prof. **SUN Wen** et Prof. **WEI Yong**

Notes du cours principalement par **YE Xiaowei**

Février 2022 -Juin 2022

Références:

Les deux suivants sont des polycopiés :

1. Intégration,Probabilités et Processus Aléatoires, Jean-François Le Gall

2. Équations Différentielles, Davide Barilari

   Et on cite parfois :

3. Real and Complex Analysis, Walter Rudin

4. Real Analysis, E.M.Stein et R.Shakarchi

5. Probability: Theory and Examples, Rick Durrett

6. Analysis III, H.Amann et J.Escher

7. Measure Theory and Fine Properties of Functions, L.C.Evans et R.F.Gariepy

   Voici les pages web du cours :

8. https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/∼nonnenma/enseign/USTC_2022.html

9. https://webusers.imj-prg.fr/∼elisha.falbel/HEFEI.html

Abstrait :

Ce cours est donné aux étudiants de 2e année de la classe sino-française de l'Université des Sciences et Technologies de la Chine, à Hefei, durant le printemps et l'été 2022.

Ces notes de cours contiennent des solutions aux exercices du cours de TD, elles contiennent aussi des remarques et des commentaires donnés par les deux professeurs ou les camarades.

Table des matières

TD1.1 Bienvenue au cours d'Analyse IV!

Exercice 1.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $f : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. Montrer que si f est croissante alors

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n); \qquad f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Que dire si f est décroissante ?

Solution: Rappelons que $\limsup_{n\to\infty} x_n$(resp.$\liminf_{n\to\infty} x_n$) est le plus grand(resp.petit) nombre qui est la limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 1}$. Prenons

$$x_{n_k} \to \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

puisque f est continue, on a

$$f(x_{n_k}) \to f(\limsup_{n\to\infty} x_n).$$

Cela montre que

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Prenons maintenant $(x_{n_l})_{l\geq 1}$ t.q. $(f(x_{n_l}))_{l\geq 1}$ tend croissantement vers $\limsup_{n\to\infty} f(x_n)$. Puisque f est croissante, on peut supposer de plus que (x_{n_l}) est croissante, cette suite a ainsi une limite $l \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$. On obtient que

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) \geq f(l) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Les deux inégalités impliquent l'égalité

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n),$$

l'égalité pour $\liminf$ est similaire.

Si f est décroissante, les résultats deviennent

$$f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n); \qquad f(\liminf_{n\to\infty} x_n) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Exercice 2.(Fonctions indicatrices)

Soit E un ensemble. Si $A \subset E$, on note χ_A l'application $E \to \{0,1\}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon. La fonction $\chi_A(x)$ est appelée la fonction indicatrice de A (ou encore fonction caratéristique de A ou simplement l'indicatrice de A).

1) $A, B \subset E$, écrire $\chi_{A\cap B}$ et $\chi_{A\cup B}$ en fonction de χ_A et χ_B.

2) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensemble de E. Relier les fonctions indicatrices $\chi_{\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n}$ et $\chi_{\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n}$ aux fonctions $\chi_{A_n}, n \geq 1$.

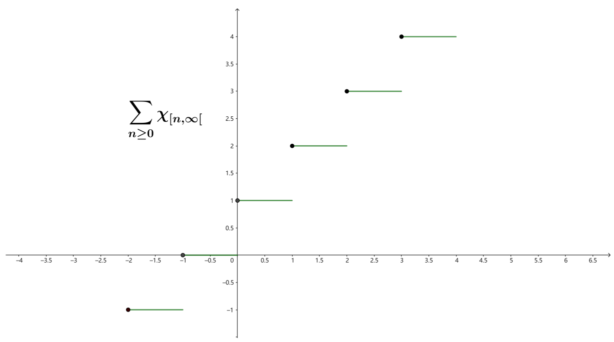
3) Représenter graphiquement les fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$):

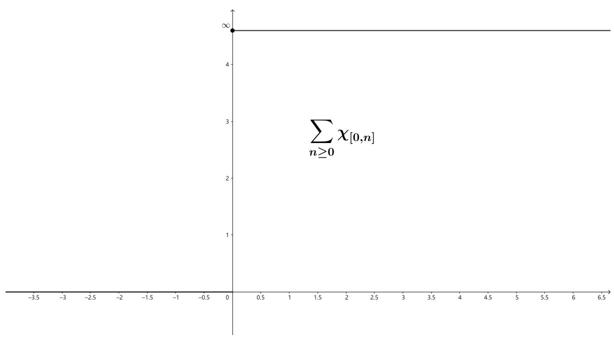
$$\sum_{n\geq 0} \chi_{[n,\infty[}; \qquad \sum_{n\geq 0} \chi_{[0,n]}; \qquad \sum_{n\geq 0} \chi_{[n,n+1[}.$$

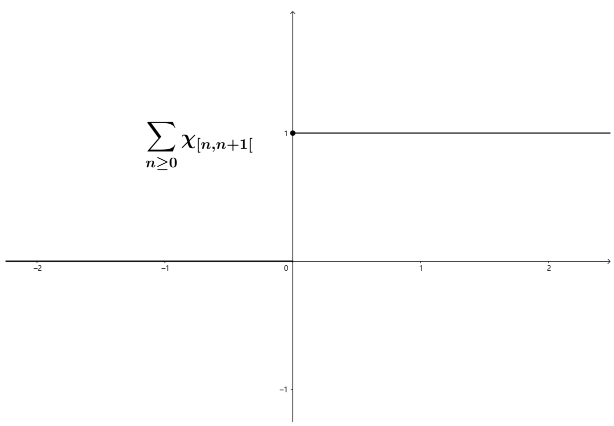
Solution: 1) $\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A \cdot \chi_B$; $\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.

2) $\chi_{\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n} = \inf\limits_{n\geq 1} \chi_{A_n} = \prod\limits_{n\geq 1} \chi_{A_n}$; $\chi_{\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n} = \sup\limits_{n\geq 1} \chi_{A_n} = 1 - \prod\limits_{n\geq 1}(1 - \chi_{A_n})$.

3) Voir ci-dessous :







Exercice 3.

On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E.

1) Que représentent les ensembles suivants:

$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k; \qquad \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k?$$

Le premier est noté $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ et le second $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions indicatrices

$$\chi_{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n}; \qquad \chi_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n}$$

aux fonctions $\chi_{A_n}, n \geq 1$.

2) Montrer que les propriétés suivqntes sont vérifiées:

(a) $(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf\limits_{n\to\infty}(A_n)^c$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$;

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{\sum\limits_{n\geq 0} \chi_{A_n} = \infty\}$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{\sum\limits_{n\geq 0} \chi_{(A_n)^c} < \infty\}$;

(c) $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cup \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$ et $\limsup\limits_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \cap \limsup\limits_{n\to\infty} B_n$.

3) Calculer $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ dans les cas suivants :

(a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés;

(b) $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2p} = 1 + \dfrac{1}{2p}$ et $a_{2p+1} = -1 - \dfrac{1}{2p+1}$;

(c) $A_{2p} = \left]0, 3 + \dfrac{1}{2p}\right]$ et $A_{2p+1} = \left]-1 - \dfrac{1}{3p}, 2\right]$;

(d) $A_n = p_n\mathbb{N}$ où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers et $p_n\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples de p_n;

(e) $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.

Solution: 1) Le premier représente l'ensemble d'éléments contenus dans A_n sauf pour un nombre fini de n, et le second représente l'ensemble d'éléments contenus dans A_n pour un nombre infini de n. Pour les fonctions indicatrices, on a :

$$\chi_{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}; \qquad \chi_{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}.$$

2) (a) L'égalité

$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty}(A_n)^c$$

est facile par la loi de Morgan.

Pour montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

réfléchissons à ce qu'on a dit pour la question précédente.

(b) Réfléchissons à ce qu'on a dit pour la question précédente.

(c) On peut montrer que

$$\{\sum_{n\geq 0} \chi_{A_n\cup B_n} = \infty\} = \{\sum_{n\geq 0} \chi_{A_n} = \infty\} \cup \{\sum_{n\geq 0} \chi_{B_n} = \infty\},$$

d'après (b), on sait que l'ensemble à gauche est $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n)$ et que l'ensemble à droite est $\limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$, donc

$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n.$$

On peut aussi montrer que

$$\{\sum_{n\geq 0} \chi_{A_n\cap B_n} = \infty\} \subset \{\sum_{n\geq 0} \chi_{A_n} = \infty\} \cap \{\sum_{n\geq 0} \chi_{B_n} = \infty\},$$

ça implique que

$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n.$$

3) (a) $\liminf_{n\to\infty} A_n = F \cap G$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n = F \cup G$;
(b) $\liminf_{n\to\infty} A_n =]-\infty, -1[$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n =]-\infty, 1]$;
(c) $\liminf_{n\to\infty} A_n =]0, 2]$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n = [-1, 3]$;
(d) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{0\}$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{0\}$;
(e) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{0\}$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n =]-2, 2[$.

Remarque: Les inclusions dans 2) (a) et dans 2) (c) peuvent être stricte :

Pour des exemples d'une inclusion stricte dans 2) (a), voir 3).

Et pour 2) (c), considérons $A_{2n} = B_{2n+1} = F, A_{2n+1} = B_{2n} = G$, où $F \cap G$ est strictement contenu dans $F \cup G$.

Exercice 4.

Soit $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{0, 1, \cdots, n2^n - 1\}$ on note

$$A_n = \{x \in E : f(x) \geq n\}, \qquad B_{n,i} = \{x \in E : i2^{-n} \leq f(x) < (i+1)2^{-n}\},$$

et pour un entier $n \geq 1$ on pose $f_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n}\chi_{B_{n_i}} + n\chi_{A_n}$. Soit $x \in E$ fixé. Que dire la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ lorsque $n \to \infty$?

Solution: On a toujours l'égalité $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Si $f(x) = +\infty$, alors $\forall n \geq 1, \forall i \in \{0, 1, \cdots, n2^n - 1\}$, on obtient que $x \in A_n, x \notin B_{n,i}$, donc $f_n(x) = n \to +\infty = f(x)$ lorsque $n \to \infty$.

Si $f(x) < +\infty$, alors

$$\forall n > f(x), f_n(x) = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n}\chi_{B_{n_i}}(x).$$

Puisque $f(x) \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[$ implique $f_n(x) = \frac{i}{2^n}$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$, d'où le résultat.

Remarque: Avec des concepts que l'on apprendra dans quelques semaines, cet exercice nous dit un fait important qu'une fonction mesurable positive s'écrit comme la limite d'une suite croissante de fonctions étagées.

Exercice 5.(Constante de connectivité du réseau $\mathbb{Z}^2$)

Un chemin auto-évitant de logeur n dans $\mathbb{Z}^2$ est une suite de points distincts $A_0, A_1, \cdots, A_n$ à coordonnées entières où A_0 est l'origine et tels que la distance entre A_i et A_{i+1} vaut 1 pour tout $0 \leq i \leq n-1$.

1) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels vérifiant $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pour tous entiers $m, n \geq 0$. Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$.

2) Soit a_n le nombre de chemins auto-évitant de longeur n de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que $a_n^{\frac{1}{n}}$ converge lorsque $n \to \infty$ vers un réel positif noté c et que $2 < c < 3$.

Solution: 1) Soit $\alpha := \inf \dfrac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Notons qu'on peut montrer par récurrence sur $m \geq 1$ que

$$\frac{a_{mn}}{mn} \leq \frac{a_n}{n}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$ t.q.$\dfrac{a_r}{r} \in [\alpha, \alpha + \varepsilon[$. On obtient donc que

$$\alpha \leq \frac{a_{mr+q}}{mr+q} \leq \frac{a_{mr} + a_q}{mr+q} \leq \frac{a_{mr}}{mr} + \frac{a_q}{mr+q} \leq \alpha + 2\varepsilon$$

pour tout $0 \leq q \leq r-1$ et m suffisamment grand. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la suite $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf\limits_{n \geq 1} \dfrac{a_n}{n}$.

Si $\alpha = -\infty$, un argument similaire implique le résultat voulu.

2) Pour un chemin auto-évitant de logeur $m+n$, noté $A_0, \cdots, A_{m+n}$, on considère deux de ses «sous-chemins»: le chemin auto-évitant de logeur m: $A_0, \cdots, A_m$; et le chemin auto-évitant de logeur n: $A_m - A_m, \cdots, A_{m+n} - A_m$, ces deux chemins auto-évitants déterminent le chemin $A_0, \cdots, A_{m+n}$. Ainsi on a :

$$a_{m+n} \leq a_m \cdot a_n.$$

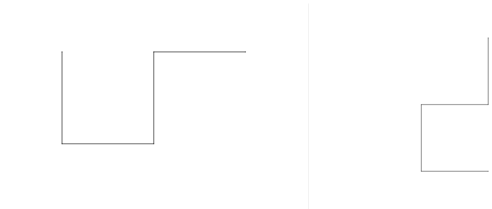
D'après 1), la suite $\left(\dfrac{\ln a_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ tend vers une limits dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, donc $a_n^{\frac{1}{n}}$ converge lorsque $n \to \infty$ vers un réel positif c.

En considérant où le chemin peut arriver dans 4 marches, on obtient que

$$a_n \leq C_0 (3^4 - 1)^{\lceil \frac{n}{4} \rceil}.$$

En considérant où le chemin peut arriver dans 4 marches et en considérant seulement les chemins tels que soit x_{A_i} et y_{A_i} sont croissants, soit les 4 marches sont comme l'un des deux cas dans l'illustration suivante, on obtitne que

$$a_n \geq D_0 (2^4 + 1)^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}.$$



Cela implique que $2 < c < 3$.

Remarque: Ce réel positif c est appelé la constante de connectivité du réseau $\mathbb{Z}^2$. On ne connaît pas sa valeur exacte. La constante de connectivité du réseau hexagonal a été calculée par Hugo Duminil-Copin (Fields 2022) et Stanislav Smirnov (Fields 2010) en 2012, résolvant ainsi une conjecture formulée en physique théorique il y a 30 ans par Nienhuis. Voici une référence :

H.Duminil-Copin et S.Smirnov, The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $Annals\ of\ Mathematics$,175(3),1653-1665(2012).

TD1.2 Tribus et Mesures I

Exercice 1.(Lemme de Borel-Cantelli)

$(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré (μ est une mesure positive) et que $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1) Montrer que

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right),$$

et que si $\mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n\right) < \infty$, alors

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Qu'est-ce qui se passe si $\mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n\right) = \infty$?

2) (Lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum\limits_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

3) (Une application du lemme de Borel-Cantelli) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux tels que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

i.e. presque tout x est «mal approchable par des rationnels à l'ordre $2+\varepsilon$».

Solution: 1) Pour montrer les deux inégalités, il suffit d'utiliser la proposition suivante :

Proposition: (a) Si $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ et $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

(b) Si $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ et $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

dès que $\mu(A_1) < \infty$.

Remarquons que l'inégalité

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)$$

n'est pas nécessairement vraie si $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \infty$, voici un example : $E = \mathbb{N}, A_n = \{n\}$ et μ la mesure de compte sur $\mathbb{N}$.

2) Comme $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$, on a

$$\sum_{n\geq k} \mu(A_n) \to 0 \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Puisque $\mu\left(\bigcup_{n\geq k} A_n\right) \leq \sum_{n\geq k} \mu(A_n)$, on obtient que

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq k} A_n\right) \to 0 \text{ lorsque } k \to \infty.$$

D'après 1), on a ainsi

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n\geq k} A_n\right) = 0.$$

3) On définit $A_n = \{x \in [0,1] : \exists m \in \mathbb{N},\ \text{t.q. pgcd}(m,n) = 1,\ \text{et } \left|x - \frac{m}{n}\right| = \frac{1}{n^{2+\varepsilon}}\}$, alors ce qu'on veut montrer devient

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0,$$

où μ est la mesure de Lebesgue.

D'après 2), il suffit de montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty.$$

Par une estimation simple :

$$\mu(A_n) \leq n \cdot \frac{2}{n^{2+\varepsilon}} = \frac{2}{n^{1+\varepsilon}},$$

on obtient que

$$\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^{1+\varepsilon}} < \infty,$$

d'où le résultat.

Remarque: Le lemme de Borel-Cantelli est très important, ce lemme et nous vont se rencontrer au cours de la théorie de probabilité ce semèstre.

Exercice 2.(Mesure sur $\mathbb{Z}$)

Existe-t-il une mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation?

Solution: Si μ est une telle mesure, alors $\mu(\{n\}) = \mu(\{0\}), \forall n \in \mathbb{Z}$. On a ainsi

$$\infty > \mu(\mathbb{Z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n\}),$$

donc $\mu(\{n\}) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, μ est ainsi la mesure nulle.

On obtient donc que la seule mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation est la mesure nulle.

Exercice 3.(Opérations sur les tribus)

Répondez aux questions suivantes :

1) Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{F}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$$

est une tribu de B.

2) Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesurable et $\pi : X \times Y \to X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F) : F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?

3) On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n := \sigma(\{0\}, \{1\}, \cdots, \{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est croissante mais que $\bigcup\limits_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le sous-ensemble $2\mathbb{N}$.

4) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Best Wen dit : alors nécessairement, il existe une sous-famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$. A-t-elle raison ?

5) Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$. Best Wen dit : alors nécessairement, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$. A-t-elle raison ?

Solution: 1) La vérification est directe, donc on l'omet.

2) La réponse est négative : prenons $X = Y = \{0, 1\}, \mathcal{F} = \sigma(\{(0, 0)\})$.

3) La suite de tribus $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est évidemment croissante.

Si $\bigcup\limits_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ est une tribu, comme $\{n\} \in \bigcup\limits_{n\geq 0} \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et puisque $\mathbb{N}$ est dénombrable, cette tribu est la tribu totale $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{N}$. Alors nécessairement,

$$2\mathbb{N} \in \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n.$$

On a alors $\exists n \in \mathbb{N}, 2\mathbb{N} \in \mathcal{F}_n$. Mais on sait bien la structure de $\mathcal{F}_n$:

$$\forall A \in \mathcal{F}_n, A \subset \{0, 1, \cdots, n\} \text{ ou } \{n+1, n+2, \cdots\} \subset A,$$

d'où une contradiction.

4) Elle a raison. Il suffit de obtenir que $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcup_{\mathcal{D}\subset\mathcal{C} \text{ dénombrable}} \sigma(\mathcal{D})$. La vérification est directe.

5) Elle a raison. On peut vérifier les suivants :

(i) Vérifions que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ est une tribu;

(ii) Puisque $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$, on a $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, donc $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$;

(iii) On pose $\Sigma := \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\}$ et vérifie que Σ est une tribu et que $\mathcal{A} \subset \Sigma$, donc $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Sigma$. Et puis le résultat est obtenu directement de la définition de Σ.

Exercice 4.

Soit X un ensemble.

1) Si $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est un espace mesuré $\sigma-$fini avec $\mu(X) = \infty$. Montrer que

$$\forall 0 < M < \infty, \exists A \in \mathcal{S} \text{ t.q. } M < \mu(A) < \infty.$$

2) Soit X un ensemble infini. Soit $m(A) = 0$ si $A \subset X$ est fini et $m(A) = \infty$ sinon. Montrer que m est finiement additive mais pas dénombrablement additive.

3) Soit X un ensemble infini. Soit $\mathcal{A}$ la famille d'ensembles finis ou de complément fini. Pour $A \in \mathcal{A}$, on définit $m(A) = 0$ si A est fini et $m(A) = 1$ son complément l'est.

(a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un algèbre mais pas une tribu.

(b) Montrer que m est finiement additive sur $\mathcal{A}$.

(c) Sous quelle condition peut-on conclure que m est étendue en une mesure dénombrablement additive sur une tribu ?

Solution: 1) Par l'hypothèse, $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$ avec $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'ensembles de mesure fini. Alors, la suite $(\mu(X_n))_{n\geq 1}$ est croissante et elle converge vers $\mu(X) = +\infty$.

Par définition, $\forall 0 < M < \infty, \exists n \geq 1 \text{ t.q. } M < \mu(X_n) < \infty$.

2) D'après les faits que l'union d'un nombre fini d'ensembles finis est encore fini et qu'un ensemble infini admet un sous-ensemble dénombrable infini.

3) (a)(b) La vérification est directe, donc on l'omet.

(c) La condition suffisante et nécessaire est que X soit indénombrable.

La tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est la famille $\mathcal{F}$ des ensembles dénombrable ou de complément dénombrable.

Si X est indénombrable, on définit $m(A) = 0$ si A est fini et $m(A) = 1$ son complément l'est, c'est exactement la mesure étendue voulue.

Si X est dénombrable, $\mathcal{F}$ est la tribu totale $\mathcal{P}(X)$. Si m est étendue en une mesure, alors cette mesure est nécessairement nulle car $m(A) = 0$ pour tout A fini, ça contredit que $m(X) = 1$.

Exercice 5.(Sur l'intégrale de Riemann)

Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné. On note $\mathscr{B}$ l'espace des fonctions bornées $I \to \mathbb{R}$. On munit cet espace de la norme sup $||\cdot||_\infty$. On note $\mathscr{E}$ le sous-espace des fonctions en escalier de $I \to \mathbb{R}$.

On rappelle que pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$, il existe une partition de I en un nombre fini d'intervalles $I = \bigsqcup_{k=1}^{K} I_k$, tels que chaque restriction $f|_{I_k}$ est constante, égale à une valeur $a_k \in \mathbb{R}$:

$$f = \sum_{k=1}^{K} a_k \chi_{I_k}.$$

1) Rappeler la définition de l'intégrale de Riemann $S(f)$ d'une fonction f en escalier, en fonction des paramètres ci-dessus. Montrer que l'application $S : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ est linéaire, et que si on munit $\mathbb{R}$ de la norme usuelle $|\cdot|$, et $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}$ de la norme sup $||\cdot||_\infty$, l'application S est lipschitzienne.

2) On rappelle que les fonctions réglées sont les valeurs d'adhérence dans $(\mathscr{B}, ||\cdot||_\infty)$ des fonctions en escalier. Montrer que si deux suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier convergent uniformément vers une fonction réglé f, alors les intégrales $(S(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S(\tilde{f}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite. On appelle cette limite l'intégrale de f, noté $S(f)$.

3) On a étendu l'application $S : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ en une application $S : \mathscr{R} \to \mathbb{R}$. Vérifier que cette application est linéaire et lipschitzienne (par rapport à la norme sup $||\cdot||_\infty$ sur $\mathscr{R}$).

4) Pour toute fonction $f \in \mathscr{B}$, on peut définir l'ensemble des fonctions en escalier majorant $|f|$: $\hat{\mathscr{E}}(f) := \{p \in :|f(x)| \leq p(x), \forall x \in I\}$.

On définit aussi $N(f) := \inf\{S(g) : g \in \hat{\mathscr{E}}(f)\}$. Montrer que $N(f)$ définit une semi-norme sur $\mathscr{B}$. (On rappelle qu'une semi-norme satisfait $N(\alpha f) = |\alpha| N(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et l'inégalité triangulaire $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.)

5) On dit qu'une fonction $f \in \mathscr{B}$ est Riemann-intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier, telle que $N(f - f_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans ce sens, alors les intégrales $S(f_n)$ convergent. Vérifier que la limite est indépendante du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution: 1) On rappelle que $S(f) = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k |I_k|$, et l'application $S : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ est évidemment linéaire et 1-lipschitzienne.

2) Puisque $(S(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S(\tilde{f}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont suites de Cauchy, elles convergent.

On pose $\hat{f}_n = f_n$ si n est pair et $\hat{f}_n = \tilde{f}_n$ si n est impair, alors $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, donc $(S(\hat{f}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

En comparant les 3 limites on obtient que $(S(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S(\tilde{f}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite.

3) 4) On omet les vérifications.

5) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, m, n > N \implies N(f_n - f_m) < \varepsilon$, donc

$$m, n > N \implies |S(f_m) - S(f_n)| \leq S(|f_m - f_m|) < \varepsilon.$$

Ainsi les intégrales $S(f_n)$ convergent, c'est facile à obtenir que la limite est indépendante du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6.(Entropie d'une mesure discrète)

On se place sur l'ensemble fini $E = \{1, 2, \cdots, n\}$ muni de sa tribu totale $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$.

1) Qu'appelle-t-on la mesure de probabilité uniforme sur E ?

On choisira cette mesure μ dans cet exercice. On s'intéresse aux partitions de E en N sous-ensemble, avec $N \leq n$. Pour chaque partition $\mathcal{P} = \{E_1, \cdots, E_N\}$ on associe son entropie, qui est un nombre réel défini par

$$H(\mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{N} -\mu(E_j)\ln(\mu(E_j)).$$

(On prend la convention que $0 \cdot \ln(0) = 0$.)

2) Montrer que l'entropie d'une partition est toujours positive. Pour quelles partitions a-t-on $H(\mathcal{P}) = 0$?

3) On considère une partition en 2 sous-ensembles non vides $E = E_1 \sqcup E_2$, et on suppose que le cardinal de E_1 vaut $k \in]0, n[$. Calculer l'entropie de cette partition.

4) Montrer que si $\mathcal{P}$ possède une partie E_j de cardinal $|E_j| > 1$, alors on peut augmenter la valeur de l'entropie de $\mathcal{P}$ en séparant E_j en deux sous-ensembles disjoints non vides.

Indication : on pourra montrer et utiliser le fait que la fonction $\eta(x) := -x\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est strictement sous-additive : $\forall x, y > 0, \eta(x+y) < \eta(x) + \eta(y)$.

5) En déduire la partition $\mathcal{P}$ de E ayant l'entropie maximale. Quelle est la valeur de cette entropie ?

Solution: 1) C'est la mesure μ t.q. $\mu(\{i\}) = \dfrac{1}{n}, \forall i \in E$.

2) Comme $\mu(E_j) \in [0,1]$ et $-x\ln(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, on a toujours $H(\mathcal{P}) \geq 0$.

$$H(\mathcal{P}) = 0 \quad \text{s.s.i.} \quad \mu(E_j) \in \{0,1\}, \forall j \in E \quad \text{s.s.i.} \quad N = 1, \mathcal{P} = \{E\}.$$

3) $H(\mathcal{P}) = -\dfrac{k}{n}\ln\left(\dfrac{k}{n}\right) - \dfrac{n-k}{n}\ln\left(\dfrac{n-k}{n}\right)$.

4) On pose $f(x,y) = (\eta(x) + \eta(y)) - \eta(x+y)$, alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(x+y) - \ln(x) > 0, \forall x, y > 0.$$

Ainsi $f(x,y) > f(0,y) = 0$, d'où le résultat.

5) $\mathcal{P} = \{\{1\}, \cdots, \{n\}\}, H(\mathcal{P}) = \ln(n)$.

TD2 Tribus et Mesures II

Exercice 1.(Mesure invariante par une application)

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : (E, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{A})$ une application mesurable. On rappelle la définition de la mesure image de μ par f : $\forall A \in \mathcal{A}, f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

1) On considère le cas $(E, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et on prend l'application $f(x) = 2x$, calculer la mesure image $f_*\lambda$.

Indication : On pourra commencer par calculer la mesure des intervalles ouverts $]a, b[$.

2) On dit qu'une mesure μ est $f-$invariante si $f_*\mu = \mu$. Déterminer toutes les mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariantes par l'application $x \mapsto 2x$.

Indication : Se servir de la finitude de μ pour montrer que nécessairement $\mu(\mathbb{R}) = 0$.

3) On reste dans le cadre de l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple d'application borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différente de l'identité, telle que $f_*\lambda = \lambda$.

4) On se place à présent dans le cas d'un ensemble fini $E = \{1, 2, \cdots, n\}$, et de la tribu totale $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$. Soit $f : E \to E$ une bijection sur E (donc une permutation de E). Déterminer toutes les mesures $f-$invariantes.

Indication : On se rappellera qu'une permutation peut se décomposer en un produit de cycles.

Solution: 1) $f_*\lambda = \dfrac{1}{2}\lambda$, car $f_*\lambda(]a, b[) = \dfrac{1}{2}\lambda(]a, b[)$ et tous les intervalles ouverts forment une classe monotone. (c.f. Le Gall, i.e. la référence 1, Page16. Corollaire 1.4.2)

2) Comme l'indication, on obtient que la seule telle mesure est la mesure nulle.

3) $f(x) = x + 1$.

4) Les mesures $f-$invariantes sont exactement les fonctions positives constantes sur toutes les orbites sous l'action de f.

Exercice 2.(Ensemble de Cantor)

Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'entiers $x_n \in \{0, 1, 2\}$ on définit

$$S((x_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}.$$

1) Montrer que cette application est bien définie, et que son image est l'itervalle $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Pour cela, donner un algorithme pour, à partir d'un réel $x \in I$, fabriquer une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $S((x_n)_{n\geq 1}) = x$. On appelle la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ le développement triadique de x (ou développement en base 3 de x).

2) Montrer que l'application S n'est pas injective, mais que certains points $x \in I$ admettent 2 antécédents par S. Montrer que ces «points doubles» forment un sous-ensemble dénombrable de I, qu'on notera D.

3) On considère le sous-ensemble de suites $\Sigma' := \{(x_n)_{n\geq 1} \in \Sigma : x_n \in \{0, 2\}\}$, et on définit K comme l'image de Σ' par l'application S : $K = S(\Sigma')$. Montrer que Σ' n'est pas dénombrable, et que l'application restreinte $S|_{\Sigma'} : \Sigma' \to K$ est bijective. En déduire que K n'est pas dénombrable.

Indication : On pourra se servir du développement dyadique des points $x \in I$.

4) Pour tout $j \geq 1$, on définit le sous-ensemble de suites

$$\Sigma_j := \{(x_n)_{n\geq 1} \in \Sigma : \exists k \in \{1, \cdots, j\}, x_k = 1\}.$$

Décrire les images $A_j := S(\Sigma_j) \subset I$, et dessiner A_1 et A_2. On vérifiera que les $(A_j)_{j\geq 1}$ forment une suite croissante d'ensembles boréliens. Exprimer K en se servant des ensembles A_j. En déduire que K est un sous-ensemble borélien de I.

5) Calculer la mesure de Lebesgue de chaque ensemble A_j. En déduire que K est de mesure de Lebesgue nulle.

Indication : On se servira de la $\sigma-$additivité de la mesure.

6) En déduire que K est d'intérieur vide.

Solution: 1) La série dans la définition de S est convergente (la somme partielle est croissante est bornée), donc S est bien définie.

Pour tout $x \in I$, on a

$$x_1 = \lfloor 3x \rfloor, x_n = \lfloor 3^n x - \sum_{k=1}^{n-1} 3^{n-k} x_k \rfloor, n \geq 1.$$

2) On observe que $S((x_n)_{n\geq 1}) = S((y_n)_{n\geq 1})$ s.s.i. $\exists t \geq 1$ t.q.

$$x_n = y_n, \forall n < t, x_t = y_t + 1, \text{ et } x_n = 0, y_n = 2, \forall n > t;$$

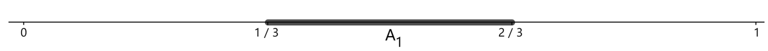
ou symétriquement, $x_n = y_n, \forall n < t, y_t = x_t + 1$, et $y_n = 0, x_n = 2, \forall n > t$.

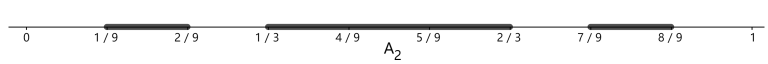
3) $|\Sigma'| = 2^{|\mathbb{N}|} > |\mathbb{N}|$.

D'après 2), on sait la structure des «points doubles», d'où on obtient facilement que l'application restreinte $S|_{\Sigma'} : \Sigma' \to K$ est bijective.

On a K est indénombrable car Σ' l'est.

4) Voici les dessins de A_1 et A_2 :





En générale, A_j est l'union de $2^j - 1$ intervalles disjoints, donc les $(A_j)_{j\geq 1}$ sont boréliens.

C'est évident que les $(A_j)_{j\geq 1}$ forment une suite croissante et que

$$K = \bigcap_{j\geq 1} A_j^c,$$

K est ainsi borélien.

5) $\mu(A_j) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^j \implies \mu(K) = 0.$

6) Un ensemble de mesure de Lebesgue nulle est nécessairement d'intérieur vide.

Remarque: L'ensemble K est appelé l'ensemble de Cantor, ou ensemble triadique de Cantor (il existe de nombreuses variantes). C'est un exemple de sous-ensemble indénombrable mais de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 3.(La tribu borélienne d'espace produit)

Soit X, Y deux espaces métriques.

1) Supposons que $X = Y = \mathbb{R}$, montrer que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.

2) L'égalité dans 1), est-elle vraie pour tous espaces métriques X, Y ?

Solution: 1) c.f. Le Gall, i.e. la référence 1, Page57. Proposition 5.1.1.

2) La réponse est : non !

Comme la preuve de 1) on sait que c'est vrai qu'on a toujours l'inclusion

$$\mathcal{B}(X \times Y) \supset \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y).$$

Mais l'inclusion réciproque n'est pas vraie en générale :

Lemme: Soit $U \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$, alors il existe des enembles mesurables $(A_i, B_i)_{i\in\mathbb{R}}$ tels que

$$U = \bigcup_{i\in\mathbb{R}} A_i \times B_i.$$

Démostration du lemme: D'après TD1.2, Exercice3.4), il existe une suite $(A_m)_{m\geq 0}$ d'ensemble mesurables tels que $U \in \sigma\left((A_m \times A_n)_{m,n\geq 0}\right).$

Maintenant, pour une suite $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, posons

$$B_x = \bigcap_{n\geq 0} C_n,$$

où $C_n = A_n$ si $x_n = 1$ et $C_n = A_n^c$ si $x_n = 0$. On peut vérifier que des ensembles qui s'écrivent comme union des $B_x \times B_{x'}$ forment une tribu, cette tribu contient les $A_i \times A_j$, donc elle contient aussi U, ainsi on en tire :

$$U = \bigcup_{B_x \times B_{x'} \subset U} B_x \times B_{x'}.$$

Comme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection, ceci termine la preuve du lemme.

D'après ce lemme, on considère $X = Y = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ munis des topologies discrètes, alors le sous-ensemble diagonal $\Delta := \{(x,y) \in X \times Y : x = y\}$ n'est pas dans $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$, mais il est dans $\mathcal{B}(X \times Y)$ car il est fermé.

Exercice 4.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable tel que $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{A}$. On dit que μ est portée par $S \in \mathcal{A}$ si $\mu(S^c) = 0$, que $\omega \in \Omega$ est un atome ponctuel si $\mu(\{\omega\}) \neq 0$, que μ est diffuse si elle n'a pas d'atomes ponctuels, que μ est purement atomique si elle est portée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.

1) Donner des exemples de mesures diffuses et de mesures purement atomiques.

2) Que peut-on dire d'une mesure qui est diffuse et purement atomique ?

3) Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe une mesure diffuse μ_d et une mesure purement atomique μ_a sur $\mathcal{A}$ telles que $\mu = \mu_d + \mu_a$.

4) Montrer que l'ensemble des atomes ponctuels d'une mesure $\sigma-$finie μ est dénombrable.

Solution: 1) Mesures diffuses : les mesures de Lebesgue sur les intervalles.

Mesures purement atomiques : les mesures finies uniformes sur des ensembles finis.

2) Une mesure diffuse et purement atomique est nulle.

3) Soit A l'ensemble des atomes ponctuels de μ. Alors on pose

$$\mu_a(X) = \begin{cases} \mu(X \cap A), & X \cap A \text{ dénombrable} \\ \infty, & X \cap A \text{ indénombrable} \end{cases},$$

$$\mu_d(X) = \begin{cases} \mu(X \setminus A), & X \cap A \text{ dénombrable} \\ \infty, & X \cap A \text{ indénombrable} \end{cases}.$$

Remarque: Pourquoi on fait la différence entre les deux cas ($X \cap A$ dénombrable ou non)? Parce qu'on ne peut pas montrer que A est mesurable, mais on peut montrer que tout sous-ensemble dénombrable de A l'est. Donc si $X \cap A$ est indénombrable, il est peut-être non-mesurable, dans ce cas, l'expression $\mu(X \cap A)$ n'a pas de sens.

4) Il suffit de montrer que l'ensemble des atomes ponctuels d'une mesure finie est dénombrable.

Soit μ une mesure finie et A l'ensemble des atomes ponctuels de μ. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A_\varepsilon := \{a \in A : \mu(\{a\}) > \varepsilon\}$ est fini, on sait que

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_{\frac{1}{n}},$$

ainsi on obtient que A est dénombrable.

Exercice 5.(Mesure diffuse)

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Supposons maintenant que $\mu(X) = 1$ et que μ n'a pas d'atomes. Montrer que l'image de μ est $[0, 1]$ (c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) = t$).

Solution: D'après l'hypothèse que μ n'a pas d'atomes, on a le fait suivant :

$$E_1 \subset E_2 \in \mathcal{F}, \mu(E_1) < \mu(E_2) \implies \exists E_3 \in \mathcal{F}, E_1 \subset E_3 \subset E_2, \mu(E_1) < \mu(E_3) < \mu(E_2).$$

Ceci montre que pour toute sous-famille totalement ordonnée maximale $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}, \mu(\mathcal{G})$ est dense dans $[0,1]$. D'après lemme de Zorn, une telle sous-famille $\mathcal{G}$ existe.

Pour tout $t \in [0,1]$, il existe $E_n \in \mathcal{G}$ t.q.

$$\mu(E_n) \in \left[t, t + \frac{1}{n}\right[,$$

comme $\mathcal{G}$ est totalement ordonnée, on a donc

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1} E_n\right) = t.$$

Remarque: On dit qu'une mesure est diffuse si elle n'a pas d'atomes. Cet exercice nous montre le fait qu'une mesure diffuse prend un intervalle pour image. En effet, c'est un théorème de Wacław Sierpiński.

Exercice 6.(Support)

Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$(ou plus généralement un espace métrique séparable). Posons

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0, \mu(B(x,r)) > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \setminus S) = 0$, et que

$$\mu(S \setminus F) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus F) > 0$$

pour tout fermé F strictement contenu dans S.

Remarque: On appelle S le support de la mesure μ.

Solution: Pour tout $x \in S^c$, il existe $r > 0$, t.q. $\mu(B(x,r)) = 0$, alors $B(x,r) \subset S^c$, donc on obtient que S^c est ouvert, S est ainsi fermé.

Pour montrer que $\mu(S^c) = 0$, il suffit de montrer la proposition suivante :

Proposition: Un revêtement ouvert $\mathcal{O}$ d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement un espace séparable) admet un sous-revêtement dénombrable.

Preuve de la proposition: On rappelle que $\mathbb{R}^n$ admet une base dénombrable $\mathcal{B}$: les boules ouvertes de rayon rationel et avec un centre rationel. Posons

$$\mathcal{O}_1 := \{B : B \in \mathcal{B}, \exists G \in \mathcal{O}, B \subset G\}.$$

Pour tout $B_1 \in \mathcal{O}_1$, il existe $G(B_1) \in \mathcal{O}$ t.q. $B_1 \subset G(B_1)$. Alors,

$$\mathcal{O}_2 := \{G(B_1) : B_1 \in \mathcal{O}_1\}$$

est un sous-revêtement dénombrable.

Puisque $\mu(S^c) = 0$, on a $\mu(S \setminus F) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus F)$ pour tout fermé F strictement contenu dans S. Il reste de montrer que $\mu(S \setminus F) > 0$.

Pour tout $x \in S \setminus F$, il existe $r > 0, B(x, r) \subset F^c$. Alors,

$$\mu(S \setminus F) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus F) \geq \mu(B(x, r)) > 0.$$

Exercice 7.(«Cardinal» d'une mesure)

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit, pour tout $x \in E$, l'atome de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x :

$$\hat{x} := \bigcap_{A \in \mathcal{A}, x \in A} A.$$

1) Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.

2) Montrer que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{A}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.

3) Conclure.

Solution: 1) 2) Les vérifications sont directes.

3) Si $\mathcal{A}$ est infinie dénombrable, alors la famille d'atomes est aussi infinie dénombrable. Mais ceci implique que

$$|\mathcal{A}| = 2^{|\mathbb{N}|} > |\mathbb{N}|,$$

une contradiction !

TD3 Fonctions Mesurables

Exercice 1.(Petites Questions)

Répondez aux questions suivantes :

1) Soient (X, d) un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}$), et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pourquoi f est-elle mesurable ?

2) Soient (X, d) un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}$), et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $X \to \mathbb{R}$ mesurables. Pourquoi la fonction $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$ est-elle mesurable ?

3) Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pourquoi la fonction dérivée f' est-elle mesurable?

Solution: 1) Vue en cours. C.f. les notes du cours.

2) Vue en cours. C.f. Le Gall, i.e. la référence 1, Page14. Proposition 1.3.5.

3) Pour tout $n \geq 1$, posons

$$f_n(x) = \frac{n(f(\frac{1+(n-1)x}{n}) - f(x))}{1 - x},$$

alors les $f_n :]0, 1[\to \mathbb{R}$ sont continues (donc mesurables) et elles convegent simplement vers f', la fonction dérivée f' est ainsi mesurable.

Exercice 2.(Tribus image et réciproque)

Soit $f : X \to Y$ une application. Soient $\mathcal{F}$ une tribu sur X et $\mathcal{G}$ une tribu sur Y. [1]

1) Montrer que $\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur Y.

Remarque: Elle est appelée tribu image par f.

2) (a) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\}$ est une tribu sur X.

Remarque: On l'appelle la tribu engendrée par f ou la tribu réciproque par f et on la note parfois $\sigma(f)$.

(b) Montrer que c'est la plus petite tribu sur X qui rende $f : X \to (Y, \mathcal{G})$ mesurable.

(c) Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$. Rappelons que Best Wen a dit : alors nécessairement,

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{B})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{B})).$$

3) On supppose que $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que toute fonction $g : (X, \sigma(f)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable s'écrit $g = h \circ f$ avec $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

Indication : commencer par le cas où g est étagée.

4) (Exemple) Soit $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.

(a) Montrer que la tribu réciproque par f est $\sigma(f) := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.

(b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \sigma(f))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

5) Soient $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces mesurables, Y un ensemble, des fonctions $f_i : Y \to Y_i$ et $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par la famille de fonctions $(f_i)_{i \in I}$, i.e. la plus petite tribu sur Y rendant les f_i mesurables. On la notera aussi $\sigma(f_i, i \in I)$.

(a) Prouver que

$$\sigma(f_i, i \in I) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)\right).$$

(b) Montrer que $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable s.s.i pour tout $i \in I, f_i \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (Y_i, \mathcal{B}_i)$ est mesurable.

Solution: 1) 2) Les vérifications sont directes.

3) En écrivant $g = g^+ - g^-$, on peut supposer sans perte de gnéralité que $g \geq 0$.

Avec les notations dans l'exercice 4 du TD1.1, on définit une suite croissante $(g_n)_{n \geq 1}$

des fonctions étagées qui converge simplement vers g :

$$g_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n}\chi_{B_{n,i}} + n\chi_{A_n}.$$

Lemme: $f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y)$.

Preuve du lemme: On suppose par l'absurde qu'il existe $x, y \in X, f(x) = f(y)$ mais $g(x) \neq g(y)$. Puisque g est $\sigma(f)-$mesurable, on a $g^{-1}(g(x)) \in \sigma(f)$, par définition, il existe un ensemble $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, t.q. $g^{-1}(g(x)) = f^{-1}(T)$.

On obtient donc que $f(y) = f(x) \in T$, c'est-à-dire que

$$y \in f^{-1}(T) = g^{-1}(g(x)),$$

d'où une contradiction avec l'hypothèse que $g(x) \neq g(y)$.

En utilisant ce lemme, on peut construire par récurrence sur n des ensembles mesurable C_n et $D_{n,i}$ tels que :

(i) pour tout $n \geq 1$, les C_n et $D_{n,i}$ sont disjoints ;

(ii) $f^{-1}(C_n) = A_n, f^{-1}(D_{n,i}) = B_{n,i}$;

(iii) $D_{n,i} = D_{n+1,2i} \sqcup D_{n+1,2i+1}, C_n = C_{n+1} \sqcup D_{n+1,n2^{n+1}} \sqcup \cdots \sqcup D_{n+1,(n+1)2^{n+1}-1}$.

Maintenant on pose

$$h_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n}\chi_{D_{n,i}} + n\chi_{C_n}.$$

On a alors

$$g_n = h_n \circ f,$$

et puisqu'on peut vérifier que $(h_n)_{n\geq1}$ est une suite croissante des fonctions, elle admet donc une limite mesurable $h_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on a alors $g = h_0 \circ f$.

Comme

$$f(X) \subset H := \{r \in \mathbb{R} : h_0(r) \in \mathbb{R}\}$$

et comme H est mesurable, on obtient que $h = \chi_H \cdot h_0 : X \to \mathbb{R}$ est mesurable et satisfait

$$g = h \circ f.$$

4)(a) On vérifie simplement que

$$\sigma(f) \subset \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}.$$

Comme pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A$, on a $A = f^{-1}(f(A))$, il suffit de montrer que

$$f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Puisque $f(A) = f(A \cap \mathbb{R}_+)$ et que $f|_{\mathbb{R}_+}$ est un homéomorphisme, on a $f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car

$$A \cap \mathbb{R}_+ \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(b) Ces fonctions sont exactement les fonctions s'écrivent comme $x \mapsto g(x^2)$ avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable (par rapport à la tribu borélienne), et ce sont exactement les fonctions boréliennes paires.

5)(a)(b) Les vérifications sont directes.

Exercice 3.(Tribus produits)

Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ la tribu notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma(A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}).$$

On note $\pi_X : X \times Y \to X$ et $\pi_Y : X \times Y \to Y$ les projections canoniques sur X et Y.

1) Prouver que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\pi_X, \pi_Y)$, autrement dit que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la plus petite tribu rendant π_X et π_Y mesurables.

2) Soit $f : (Z, \mathcal{C}) \to (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ une application. On écrit

$$f(z) = (f_X(z), f_Y(z)).$$

Prouver que f est $(\mathcal{C}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ mesurable si et seulement si f_X et f_Y sont respectivement $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ mesurables.

3) Prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pourra admettre que si $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}) = \{\bigcup_{i\in I} U_i \times V_i : U_i, V_i \text{ ouverts de } \mathbb{R}, I \text{ dénombrable.}\}$$

Solution: 1) 2) En utilisant l'exercice précédent.

3) C.f. TD2, Exercice 3.

Exercice 4.

Répondez aux questions suivantes :

1) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n : E \to \mathbb{R})_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des x tels que $(f_n(x))_{n\geq 1}$ admette une limite finie est mesurable.

Indication : Pensez au critère de ——.

2) (a) On munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète définie par

$$d(x, y) = \chi_{x\neq y}((x, y)).$$

Quelle est alors la tribu borélienne ? Est-ce que les tribus engendrées par les boules ouvertes et par les boules fermées sont la tribu borélienne ?

(b) Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, (X, d) un espace métrique et $(f_n : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X)))_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction $f : E \to X$. Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))$ est mesurable.

Solution: 1) Pensons au critère de Cauchy, l'ensemble des x tels que $(f_n(x))_{n\geq 1}$ admette une limite finie est

$$\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{m,n\geq N} \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}\},$$

il est ainsi mesurable.

2)(a) La tribu borélienne est la tribu totale.

Les tribus engendrées par les boules ouvertes et par les boules fermées sont la tribu

$$\mathcal{A} := \{E \subset \mathbb{R} : |E| \leq |\mathbb{N}| \text{ ou } |E^c| \leq |\mathbb{N}|\}.$$

Les tribus engendrées par les boules ouvertes et par les boules fermées ne sont pas la tribu borélienne.

(b) Il suffit de monnnnter que pour tout $V \subset X$ fermé, l'image réciproque $f^{-1}(A)$ est mesurable.

Notons que

$$f^{-1}(V) = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}\left(B\left(V, \frac{1}{k}\right)\right),$$

d'où la conclusion.

Exercice 5.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $N(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Solution: On remplace $[0,1]$ avec un intervalle borné quelconque et on montre l'énoncé plus générale.

Il suffit de montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$B_{I,n} := \{y : f(x) = y \text{ admet au moins } n \text{ solutions}\}$$

est mesurable.

C'est triviale lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$, en raisonnant par récurrence, il suffit d'obtenir que

$$B_{I,n} = \bigcup_{m\geq 2} \bigcup_{k=1}^{m-1} \bigcup_{i=1}^{n-1} (B_{I^0_{\frac{k}{m}},i} \cap B_{I^1_{\frac{k}{m}},n-i}),$$

où $I^0_{\frac{k}{m}}$ signifie la $\dfrac{k}{m}$ gauche de l'intervalle (contenant l'extrémité droite) et $I^1_{\frac{k}{m}} = I \setminus I^0_{\frac{k}{m}}$.

TD4.1 Fonctions Mesurables et Intégration I

Exercice 1.

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

1) Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.

2) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Solution: 1) Puisqu'on a

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}([-n, n]),$$

et $(f^{-1}([-n, n]))_{n \geq 1}$ est une suite croissante d'ensembles, on obtient que

$$\lim_{n \to \infty} \mu(f^{-1}([-n, n])) = \mu(X) > 0.$$

Donc il existe un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mu(f^{-1}([-n, n])) > 0,$$

alors $A = \mu(f^{-1}([-n, n]))$ suffit.

2) Notons que

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{|f| > \frac{1}{n}\},$$

et on raisonne par un argument similaire avec ce qu'on a fait dans la question précédent.

Exercice 2.(Théorème d'Egoroff)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions réelles mesurables sur E et f une fonction réelle mesurable sur E telles que

$$f_n \to f \quad \mu - \text{p.p.lorsque } n \to \infty.$$

1) Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $\eta > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{j\geq n}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\right) \leq \eta.$$

2) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) \leq \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus A$.

3) Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on suppose que $\mu(E) = \infty$.

Solution: 1) Comme $f_n \to f \quad \mu - \text{p.p.lorsque } n \to \infty$, on a

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{j\geq n}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\right) = 0.$$

Posons

$$E_{n,k} := \bigcup_{j\geq n}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\},$$

alors $(E_{n,k})_{n\geq 1}$ est une suite décroissante avec $\mu(E_{1,k}) \leq \mu(E) < \infty$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0,$$

d'où le résultat.

2) D'après 1), il existe une suite $(n_k)_{k\geq 1}$ d'entiers positives telle que pour tout $k \geq 1$, on a

$$\mu(E_{n_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Alors il suffit de prendre

$$A = \bigcup_{k\geq 1} E_{n_k,k}.$$

3) Considérons $E = \mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ et $f(x) = 0$.

Remarque: On a 3 principes, dites, les 3 principes de Littlewood :

(i) tout ensemble mesurable de mesure fini est presque une union finie d'intervalles ;

(ii) toute fonction mesurable est presque continue ;

(iii) toute suite convergente de fonctions mesurables est presque convergente uniformément.

Le théorème d'Egoroff est une précision du principe (iii). On va apprendre ensemble la semaine prochaine une précision du principe (ii), dite, le théorème de Lusin.

Exercice 3.

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ non nulle et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tous $x, y \in A$ on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Solution: Notons que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon[,$$

on en déduit que

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-1}([n\varepsilon, (n+1)\varepsilon[).$$

Puisque $\mu(X) > 0$, il existe un nombre $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\mu(f^{-1}([n\varepsilon, (n+1)\varepsilon[)) > 0,$$

il suffit de prendre

$$A = f^{-1}([n\varepsilon, (n+1)\varepsilon[).$$

Exercice 4.

Soit $C = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne de C et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu de C rendant les applications de «projection» $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x. Comparer les tribus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Solution: La réponse est : $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 \quad !$

Montrons d'abord que $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2$: Notons que $\mathcal{C}_2$ est engendrée par les ensembles

$$D_x(f,\varepsilon) := \{g : |f(x) - g(x)| < \varepsilon\},$$

comme les $D_x(f,\varepsilon)$ est ouvert par rappoort à la topologie de la convergence uniforme, ils sont dans $\mathcal{C}_1$, donc $\mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2$.

Puisque l'espace C muni de la topologie de la convergence uniforme est séparable (les polyômes à coefficients rationnels forment un sous-ensemble dense dénombrable), $\mathcal{C}_1$ est engendrée par les boules ouvertes $B(f,r) := \{g : ||g - f|| < r\}$.

(C.f. la proposition présentée dans la solution de TD2, Exercice 6.)

Puisque

$$B(f,r) = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{x\in\mathbb{Q}} D_x\left(f, r - \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{C}_2,$$

on a $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, donc $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

Exercice 5.

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonctiom positive, monotone et intégrable. Quelle est la limite de la suite

$$\left(\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x\right)_{n\geq 1} ?$$

Solution: La limite est $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Si f est croissante, on raisonne par TCD ; si f est décroissante, on raisonne par TCM.

TD4.2 Fonctions Mesurables et Intégration II

Exercice 1.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Supposons que f est dérivable sur $[0,1]$ de fonction dérivée f' bornée. Prouver que

$$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(0).$$

2) Trouver une fonction continue et presque partout dérivable (par rappoort à la mesure de Lebesgue) sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0, f(1) = 1$ et

$$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Solution: 1) Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} n\left(f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right), & 0 \leq x \leq 1 - \dfrac{1}{n} \\ 0, & 1 - \dfrac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases},$$

alors $f_n \to f'$ simplement. De plus, les f_n sont dominés par $\sup |f'|$, par TCD, on a :

$$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(0).$$

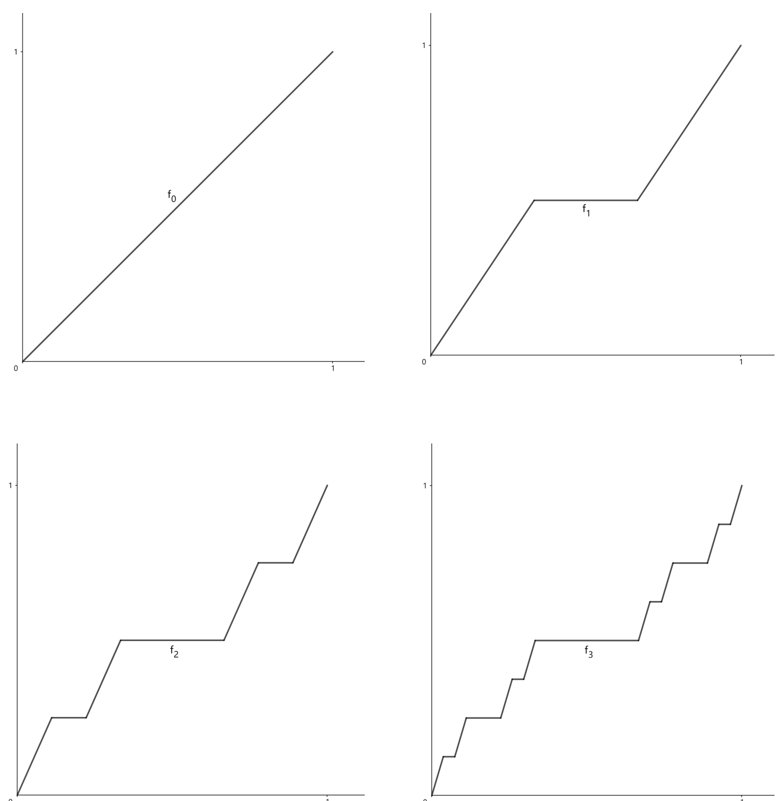
2) Posons $f_0(x) = x$, et définissons par récurrence

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2}, & 0 \leq x < \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{3} \leq x < \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1 + f_n(3x-2)}{2} & \dfrac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

On vérifie que les f_n sont continues avec $f_n(0) = 0, f_n(1) = 1$ et elles convergent uniformément vers une fonction f, f est alors continue avec $f(0) = 0, f(1) = 1$.

On vérifie aussi que f est dérivable au complémentaire de l'ensemble de Cantor, et la fonction dérivée vaut 0, donc f est la fonction voulue.

Remarque: Cette fonction f est appelée la fonction de Cantor. Voici les illustrations pour f_0, f_1, f_2, f_3 :



Exercice 2.(Borel-Cantelli est revenu)

Soient $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0.$$

Indication : on pourra considérer, pour $\eta > 0$, les ensembles

$$A_{\eta,n} := \{x \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(nx)| > \eta\}, n \geq 1.$$

Solution: Posons $A := \{x : \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0\}$, alors

$$A^c = \bigcup_{m\geq 1} \limsup_{n\to\infty} A_{\frac{1}{m},n}.$$

Il suffit de montrer que pour tout $\eta > 0$, on a

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_{\eta,n}) = 0.$$

Supposons

$$M = \int_{\mathbb{R}} |f|,$$

alors,

$$\mu(A_{\eta,n}) \leq \frac{M}{\eta n^{1+\alpha}},$$

donc

$$\sum_{n\geq 1} \mu(A_{\eta,n}) < \infty.$$

Ainsi on déduit le résultat du lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 3.(Uniforme continuté de l'intégrale)

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.

1) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int |f|\chi_{\{|f|>n\}}\mathrm{d}\mu = 0.$$

2) Montrer que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta \implies \int_A |f|\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

3) Si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, que peut-on dire de la fonction

$$F : u \mapsto \int_{[0,u]} f\mathrm{d}\lambda \quad ?$$

Solution: 1) Utilisons TCD.

2) D'après 1), il existe un nombre $M > 0$ t.q

$$\int |f|\chi_{\{|f|>M\}}\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

alors, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$ satisfait la propriété voulue.

3) F est uniformément continue.

Exercice 4.(Convergence en mesure)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et f des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f en mesure si pour tout $\varepsilon > 0, \mu(|f - f_n| > \varepsilon) \to 0$.

1) Montrer que si

$$\int_E |f - f_n|\mathrm{d}\mu \to 0,$$

alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

2) Montrer que si $f_n \to f \quad \mu-$p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

3) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une suite de $(f_n)_{n\geq 0}$ qui converge $\mu-$p.p. vers f.

4) (Un TCD plus fort.) On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ $\mu-$p.p. pour tout $n \geq 0$.

(a) Montrer que $|f| \leq g$ $\mu-$p.p.

(b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que

$$\int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0.$$

5) (L'espace $\mathbb{L}^0(E, \mu)$.) On note $\mathbb{L}^0(E, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité $\mu-$p.p.

(a) Montrer que l'on définit une distance sur $\mathbb{L}^0(E, \mu)$ par

$$\delta(f, g) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu(|f - g| > \varepsilon) < \varepsilon\}$$

et que celle-ci métrise la convergence en mesure.

(b) Montrer que $(\mathbb{L}^0(E, \mu), \delta)$ est complet.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $\mathbb{L}^0(E, \mu)$ qui métrise la convergence $\mu-$p.p.

Solution: 1) Si

$$\int_E |f - f_n| \mathrm{d}\mu \to 0,$$

alors $f_n \to f$ en mesure car

$$\mu(|f - f_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_E |f - f_n| \mathrm{d}\mu \to 0.$$

L'exemple $E =]0, 1[$ muni de la mesure de lebesgue avec $f_n(x) = \dfrac{1}{x} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$ et $f = 0$ montre que la réciproque est fausse.

2) Si $f_n \to f \quad \mu-$p.p., alors

$$\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \mu\left(\bigcup_{m \geq n} \{|f - f_m| > \varepsilon\}\right) \to 0.$$

Remarquons que la réciproque est fausse : considérons $E = [0, 1]$ muni de la mesure de lebesgue, $f_n = \chi_{[a_n - \frac{1}{n}, a_n + \frac{1}{n}]}$, $f = 0$, où

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \lfloor 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rfloor.$$

3) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on prend un nombre (par récurrence) $N_m \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\mu(|f - f_n| > \frac{1}{m}) < \frac{1}{m^2}$$

et que $N_{m+1} > N_m$. Posons $A_m := \{|f - f_n| > \frac{1}{m}\}, A = \limsup_{m\to\infty} A_m$, alors $\mu(A) = 0$ par lemme de Borel-Cantelli, et on vérifie que $f_{N_m} \to f$ sur A^c.

4)(a) C'est trivial d'après 3).

(b) Pour la suite

$$I_n = \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu$$

on a : toute sous-suite admet une sous-sous-suite converge vers 0, par le TCD normal. Donc la suite originale converge vers 0.

5)(a) La vérification est directe mais un peu lourd, on l'omet.

(b) Prenons une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ t.q. pour tout $m, n \geq n_k$,

$$\mu(|f_n - f_m| > 2^{-k}) < 2^{-k}.$$

Posons $E_k := \{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > 2^{-k}\}, F_m := \bigcup_{k\geq m} E_k$, alors $\mu(F_m) < 2^{-(m-1)}$ et f_{n_k} converge uniformément hors chaque F_m^c, donc f_{n_k} converge uniformément presque partout, supposons f la limite.

Puisque

$$\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subset \{|f_n - f_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f - f_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}\},$$

on a $f_n \to f$ en mesure.

(c) Dans un espace topologique, on a la proposition suivante :

Proposition: Si toute sous-suite de $(a_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-sous-suite qui converge vers a, alors $a_n \to a$.

Prenons l'exemple dans 2) et on obtient d'après la proposition que la convergence $\mu-$p.p. n'est pas capable avec aucune topologie.

Remarque: Dans la théorie de probabilité, la converge en mesure est aussi appelée la convergence en probabilité, qu'on vera ce semèstre.

TD5 Fonctions Mesurables et Intégration III

Exercice 1.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que

$$f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \iff \sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty.$$

Que se passe-t-il si la masse totale est infinie ?

Solution: On obtient aisément

$$\sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \int_X |f| \leq \sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) + \mu(X),$$

d'où le résultat.

Si la masse totale est infinie, on a encore

$$f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \implies \sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty,$$

mais l'implication inverse n'est plus vraie, par exemple, $X = \mathbb{R}_{>0}$ muni de la mesure de Lebesgue et

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Dans ce cas,

$$\sum_{n\geq 1}\mu(\{|f|\geq n\})=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

mais

$$f\notin \mathbb{L}^1(X,\mathcal{A},\mu).$$

Exercice 2.(Quand est-ce que convergence p.p. implique convergence dans $\mathbb{L}^1$?)

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E)<\infty$. Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{i\in I}\int_{\{|f_i|\geq c\}}|f_i|\mathrm{d}\mu=0.$$

a) Montrer que toute famille finie de $\mathbb{L}^1(\mu)$ est uniformément intégrable.

b) Montrer que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable s.s.i les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\sup_{i\in I}\int|f_i|\mathrm{d}\mu<\infty$;

(ii) $\forall\varepsilon>o,\exists\eta>0,\forall A\in\mathcal{A},\mu(A)<\eta\implies\forall i\in I,\sup_{i\in I}\int_A|f_i|\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$

c) Montrer que si les familles $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour la famille $(f_i+g_i)_{i\in I}$.

d) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions qui converge $\mu-$p.p. vers une fonction f. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable s.s.i $f\in\mathbb{L}^1(\mu)$ et

$$\int_E|f_n-f|\mathrm{d}\mu\to 0.$$

Solution: a) On raisonne comme TD4.2 Exercice3.

b) Si la famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable, alors la condition (i) est évidemment satisfaite, et on montre (ii) comme dans TD4.2 Exercice3.

Inversement, si (i) et (ii) sont satisfaites, alors, posons

$$M := \sup_{i\in I} \int |f_i| \mathrm{d}\mu < \infty,$$

comme

$$\mu(\{|f_i| \geq c\}) \leq \frac{M}{c},$$

la condition (ii) implique que

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| \mathrm{d}\mu = 0.$$

c) D'après b).

d) Si $f \in \mathbb{L}^1$ et $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^1$, alors

$$\int_E |f_n| \to \int_E |f| < \infty,$$

ça implique la condition (i) dans b). Maintenant, fixons $\varepsilon > 0$.

Puisque $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \implies \int_E |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après a), il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mu(A) < \delta \implies \int_A |f| < \frac{\varepsilon}{2}, \int_A |f_i| < \varepsilon, \forall 1 \leq i \leq N.$$

ça implique la condition (ii) dans b), donc $(f_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.

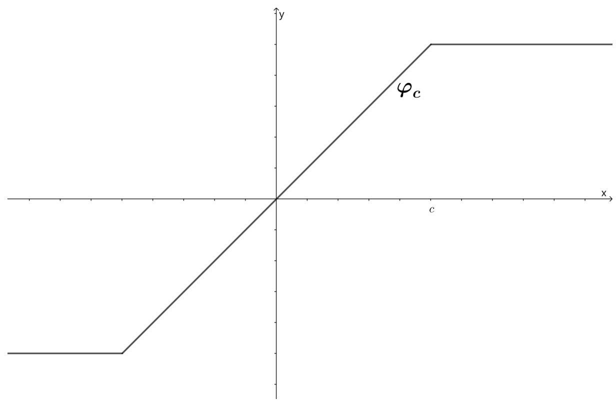
Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable, alors par lemme de Fatou, on a $f \in \mathbb{L}^1$, et on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c > 0, \forall i, \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Posons

$$\varphi_c(x) := x\chi_{[-c,c]} + c\chi_{]c,\infty[} - c\chi_{]-\infty,-c[}.$$

Voici une illustration :



Alors, pour tout $c' > c$, on a

$$\begin{aligned}\int_E |f_n - f| &\leq \int_E |f_n - \varphi_{c'}(f_n)| + \int_E |\varphi_{c'}(f_n) - \varphi_{c'}(f)| + \int_E |\varphi_{c'}(f) - f| \\ &\leq 2\varepsilon + \int_E |\varphi_{c'}(f_n) - \varphi_{c'}(f)|.\end{aligned}$$

Par TCD, on a

$$\int_E |\varphi_{c'}(f_n) - \varphi_{c'}(f)| \to 0,$$

d'où le résultat.

Exercice 3.

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$\int_E |\chi_{A_n} - f| \mathrm{d}\mu \to 0.$$

Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \chi_A$ $\mu-$p.p.

Solution: D'après les conditions donées, on peut supposer que $\mu(A_n) < \infty$. Posons

$$B_{n,\varepsilon} := \{x : |\chi_{A_n} - f| \geq \varepsilon\}, B_\varepsilon := \liminf_{n\to\infty} B_{n,\varepsilon},$$

alors $\mu(B_\varepsilon) = 0$. Posons en suite

$$A = \bigcap_{m \geq 1} B^c_{\frac{1}{m}},$$

alors $\mu(A^c = 0)$. Remarquons que si $x \in A$, alors il existe une suite d'entiers positives croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ tel que

$$\chi_{A_{n_k}}(x) \to f(x).$$

On a donc trouvé l'ensemble A voulu.

Exercice 4.(Théorème de Lusin)

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, où E est un espace topologique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{A}$, et μ est une mesure (positive) finie et régulière, i.e. telle que (régularité extérieure) pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\},$$

et (régularité inférieure) pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, A \supset K\}.$$

Soit E' un espace topologique à base dénombrable d'ouverts (muni de sa tribu borélienne). Montrer qu'une fonction $f : E \to E'$ est $\mu-$p.p. égale à une fonction borélienne si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset E$ compact de mesure $\mu(K) < \varepsilon$ et tel que la restriction de f à K^c est continue.

Remarque: On ne peut pas remplacer la première assertion par la simple mesurabilité de f si μ n'est pas complet.

Solution: Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une base d'ouverts pour E'.

On suppose d'abord que $f : E \to E'$ est $\mu-$p.p. égale à une fonction borélienne. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors, puisque μ est régulière, il existe des compacts

$$K_n \subset f^{-1}(V_n), L_n \subset f^{-1}(V_n)^c,$$

tels que

$$|\mu'(K_n) - \mu'(f^{-1}(V_n))| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, |\mu'(L_n) - \mu'(f^{-1}(V_n)^c)| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

où μ' le complètement de μ. Posons

$$K = \bigcap_{n\geq 1}(K_n \cup L_n),$$

alors K est compact et $\mu(K^c) < \varepsilon$. On vérifie que

$$f^{-1}(V_n) \cap K = L_n^c \cap K$$

et on obtient que $f|_K$ est continue.

Montrons maintenant l'implication réciproque, prenons des compacts $K_n \subset E$ t.q. $f|_{K_n}$ est continue et que

$$\mu(K_n) < \frac{1}{n}.$$

Fixons $y \in E'$ quelconque et posons

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \bigcup\limits_{n\geq 1} K_n \\ y, & x \notin \bigcup\limits_{n\geq 1} K_n \end{cases},$$

on vérifie que $\tilde{f}$ est borélienne et que $f = \tilde{f}$ $\mu-$p.p.

Exercice 5.(Théorème de Vitali-Carathéodory)

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ positive et régulière. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ intégrable, et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux fonction réelles u et v définies $E \to \overline{\mathbb{R}}$, telles que $u \leq f \leq v$, avec u semi-continue supérieurement et bornée supérieurement, et v semi-continue inférieurement et bornée inférieurement, de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} |v - u| \mathrm{d}\lambda < \varepsilon.$$

Rappel : u (respectivement v) est dite semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement) si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \{u < \alpha\}$ (resp. $\{v > \alpha\}$) est ouvert. Vous pourrez prouver que toute fonction semi-continue supérieurement ou semi-continue inférieurement est mesurable. La fonction caractéristique d'un ensemble ouvert est semi-continue inférieurement et celle d'un ensemble fermé est semi-continue supérieurement. Notez que la classe des fonctions semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement) est stable par addition (finie).

Solution: C.f. W.Rudin, i.e. la référence 3, Page56, Théorème2.25.

Exercice 6.(Régularité des mesures finies sur un espace polonais)

Un espace topologique est appelé polonais s'il dipose d'une métrique qui le rende complet et séparable. Montrer que toute mesure borélienne finie définie sur un espace polonais est régulière.

Solution: On a déjà, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert, } A \subset U\}, \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ fermé, } A \supset K\}.$$

(C.f. Le Gall, i.e. la référence 1, Page37. Proposition 3.2.7.)

Il suffit de montrer que pour tout F fermé, on a

$$\mu(F) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact, } F \supset K\}.$$

Rappelons qu'un espace métrique est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules ouvertes de rayon inférieure à ε qui font un revêtement de cet espace. On a apris le semèstre dernier qu'un espace métrique est compact si et seulement s'il est complet et précompact.

Soient $\{x_n : n \geq 1\}$ un sous-ensemble dense de F et $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $M_n \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\mu\left(F \setminus \bigcup_{i=1}^{M_n} B\left(x_i, \frac{1}{n+1}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Posons

$$F_n = \overline{F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{M_n} B\left(x_i, \frac{1}{n+1}\right)\right)}, C = \bigcap_{n \geq 1} F_n,$$

alors $\mu(F \setminus C) \leq \varepsilon$ et C est compact puisqu'il est complet et précompact, d'où le résultat.

TD6 Calculs

Exercice 1.

Calculer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, les limites quand $n \to \infty$ de

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} \mathrm{d}x$$

et de

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathrm{d}x.$$

Solution: Posons

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} \chi_{[0,n]},$$

on a $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$, et $(f_n)_{n\geq 1}$ tend simplement vers $f(x) = e^x x^{\alpha-1}$.

Par TCM, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} \mathrm{d}x = \begin{cases} +\infty, & \alpha \leq 0 \\ \Gamma(\alpha), & \alpha > 0 \end{cases}.$$

De même façon, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathrm{d}x = \begin{cases} +\infty, & \alpha \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \end{cases}.$$

Exercice 2.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables sur $(E,\mathcal{A},\mu)$. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0}\int_E |f_n|\mathrm{d}\mu < \infty \implies \sum_{n\geq 0}\int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\mathrm{d}\mu,$$

puis calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x.$$

Solution: Pour une preuve du fait que

$$\sum_{n\geq 0}\int_E |f_n|\mathrm{d}\mu < \infty \implies \sum_{n\geq 0}\int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\mathrm{d}\mu,$$

c.f. W.Rudin, i.e. la référence 3, Page22, Théorème1.27 et Page29 Théorème1.38.

On observe que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$$

et que

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^{n-1},$$

On pose

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^{n-1}$$

et on utilise le fait qu'on a justement montré, on a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque de réels et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positives.

Montrer que si

$$\sum_{n\geq 0}\sqrt{a_n} < +\infty,$$

alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{|x - a_n|} < +\infty,$$

et même, à y bien regarder,

$$\sum_{n \geq 0} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}} < +\infty.$$

Solution: Posons

$$A_k := \bigcup_{n \geq 0} B\left(a_n, \frac{\sqrt{\alpha_n}}{k}\right), A = \bigcap_{k \geq 1} A_k.$$

Alors $\mu(A) = 0$ et sur A^c, on a

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{|x - a_n|} < +\infty.$$

Il reste de montrer que pour tout $M > 0$, on a

$$\sum_{n \geq 0} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}} < +\infty.$$

pour presque tout $x \in [-M, M]$.

On a

$$\sum_{n \geq 0} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}} = \sum_{|a_n| > 2M} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}} + \sum_{|a_n| \leq 2M} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}}$$

et puisque

$$\sum_{|a_n| > 2M} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}} \leq \sum_{|a_n| > 2M} \sqrt{\frac{\alpha_n}{M}} < \infty$$

et que

$$\sum_{|a_n| \leq 2M} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}} \in \mathbb{L}^1([-M, M]),$$

on a donc

$$\sum_{n \geq 0} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x - a_n|}} < +\infty, \mu - \text{p.p.}$$

Exercice 4.

En dérivant sous le signe somme, calculer la transforméde de Fourier de la densité gaussienne $f(x) := \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Rappel :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Solution: On a

$$\left(\hat{f}(y)\right)' = \int_{\mathbb{R}} ixf(x)e^{ixy}\mathrm{d}x$$

puisque $f'(x) = -xf(x)$, on obtient que

$$\left(\hat{f}(y)\right)' = -i\int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{ixy}\mathrm{d}x.$$

Par intégration par parties, on a donc $\left(\hat{f}(y)\right)' = -y\hat{f}(y)$ et ainsi $\hat{f}(y) = Ce^{-\frac{y^2}{2}}$. Comme $\hat{f}(0) = 1$, on a $C = 1$, donc $\hat{f}(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Exercice 5.(Théorème de Lusin, le retour)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\varepsilon \subset [a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \cap K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ et f soit continue sur K_ε.

Indication : on pourra utiliser le théorème d'Egoroff et le fait que les fonctions continues sur $[a,b]$ sont denses dans $\mathbb{L}^1([a,b])$.

Solution: On a d'abord

$$\exists n \geq 1, \lambda(E_n) < \frac{\varepsilon}{3},$$

où $E_n := \{f \geq n\}$. Puisque $f \cdot \chi_{E_n^c} \in \mathbb{L}^1$ et que les fonctions continues sur $[a,b]$ sont denses dans $\mathbb{L}^1([a,b])$, il existe une suite $(g_m \in C([a,b]))_{m\geq 1}$ t.q.

$$||f \cdot \chi_{E_n^c} - g_m||_{\mathbb{L}^1} \to 0 \text{ lorsque } m \to \infty,$$

on peut donc extraire une sous-suite t.q. $g_{m_k} \to f \cdot \chi_{E_n^c} \quad \mu - \text{p.p.}$

Par le théorème d'Egoroff, il existe $A \subset [a,b]$ mesurable t.q.

$$\lambda(A) < \frac{\varepsilon}{3}$$

et que $g_{m_k} \to f \cdot \chi_{E_n^c}$ uniformément sur A^c.

On obtient donc que f est continue sur $A^c \cup E_n^c$, et le résultat voulu est obtenu par la régularité inférieure de la mesure de Lebesgue.

Exercice 6.(Théorème de Lusin, encore)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x : f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon.$$

Indication : On pourra commecer par le cas où $f = \chi_A$ avec $A \subset [0,1]$ borélien.

Solution: c.f. W.Rudin, i.e. la référence 3, Page55, Théorème2.24.

Exercice 7.(Super Hölder)

Dans cet exercice on introduit une généralisation de l'inégalité de Hölder et l'une des ses applications.

1) Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Soient $f \in \mathbb{L}^(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f \star g$ est définie presque partout et que

$$||f \star g||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Indication :

$$|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)^p|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}.$$

2) Soit $f \in \mathbb{L}^1$ et $g \in \mathbb{L}^p, p \geq 1$. Montrer que pour tout $|a| < ||f||_1^{-1}$ l'équation

$$h - af \star h = g$$

possède une unique solution dans $\mathbb{L}^p$.

Solution: 1) On montre d'abord une inégalité :

Lemme (Inégalité de Hölder avec 3 fonctions) : Soient $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \infty]$ et $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables tels que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1,$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}} fgh \leq ||f||_\alpha ||g||_\beta ||h||_\gamma.$$

Preuve du lemme: On montre respectivement les deux inégalités suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} fgh \leq ||f||_\alpha ||gh||_{\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}}$$

et

$$||gh||_{\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}} \leq ||g||_\beta ||h||_\gamma$$

en utilisant l'inégalité de Hölder.

Par l'indication et le lemme, on a

$$\begin{aligned}|f \star g(x)| &= \int_Y (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(x-y)^p|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \\ &\leq \left(\int_Y |f(x-y)|^p |g(y)|^q \right)^{\frac{1}{r}} ||f||_p^{1-\frac{p}{r}} ||f||_q^{1-\frac{q}{r}}.\end{aligned}$$

Il suffit d'obtenir que

$$\int_X \int_Y |f(x-y)|^p |g(y)|^q = \int |f|^p \int |g|^q$$

par le théorème de Fubini.

2) On définit

$$T : \mathbb{L}^p \to \mathbb{L}^p, \quad h \mapsto af \star h + g.$$

Cette application est bien définie d'après 1). Elle est aussi une contraction, donc elle admet un unique point fixé car l'espace $\mathbb{L}^p$ est un espace de Banach.

TD7 Espaces $\mathbb{L}^p$ et Théorèmes de Fubini

Exercice 1.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$. Soient une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ bornée de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, où $p \in]1, \infty[$ et une fonction mesurable f sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ t.q. $f_n \to f$ $\mu-$p.p. lorsque $n \to \infty$.

1) Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.

2) Montrer que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^r$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $r \in [1, p[$.

3) Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Solution: 1) On applique le lemme de Fatou.

2) On suppose sans perte de généralité que $f = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque.

Par le théorème d'Egoroff, il existe $A \subset E$ mesurable avec $\mu(A^c) < \varepsilon$ tel que $f_n \to 0$ uniformément sur A.

Alors par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\int_E |f_n|^r &= \int_A |f_n|^r + \int_{A^c} |f_n|^r \\ &\leq \mu(A^c)^{1-\frac{r}{p}} ||f_n||_p^r + \int_A |f_n|^r.\end{aligned}$$

comme $f_n \to 0$ uniformément sur A on a

$$\int_E |f_n|^r \to 0$$

i.e. $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^r$.

3) On a encore $f \in \mathbb{L}^\infty$, et la conclusion de 2) est aussi encore vraie par le TCD.

Exercice 2.(Lemme de Scheffé)

Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge $\mu-$p.p. vers une fonction f de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0 \iff \lim_{n\to\infty} ||f_n||_p = ||f||_p.$$

Indication : considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, un peu comme dans la preuve du TCD.

Solution: Posons g_n comme l'indication et on a $g_n \geq 0$ par le lemme suivant :

Lemme: Soient $x, y \in \mathbb{C}$, alors $|x-y|^p \leq 2^p(|x|^p + |y|^p)$.

Preuve du lemme: On suppose sans perte de généralité que $|x| \leq |y|$, alors

$$|x-y|^p \leq 2^p|y|^p \leq 2^p(|x|^p + |y|^p).$$

1) $\Longleftarrow$: par lemme de Fatou, on a

$$\liminf \int_E g_n \geq \int_E \liminf g_n,$$

la gauche de cette inégalité est égale à

$$2^{p+1}\int_E |f|^p - \limsup \int_E |f_n - f|^p$$

et la droite de cette inégalité est égale à

$$2^{p+1}\int_E |f|^p,$$

donc on a

$$\limsup \int_E |f_n - f|^p = 0$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0.$$

2) $\Longrightarrow$: simplement par l'inégalité triangulaire.

Remarque: Attention! Ce lemme de Scheffé est très utile!

Exercice 3.(Inégalité de Hardy)

Soient $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ deux espaces mesurés $\sigma-$finis. On considère $\varphi : (X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \nu$, et F la fonction définie pour $\mu-$p.t. $x \in X$ par

$$F(x) = \int_Y \varphi(x, y)\nu(\mathrm{d}y).$$

1) Montrer que F vérifie l'inégalité

$$||F||_{\mathbb{L}^p(\mu)} \leq \int_Y ||\varphi(\cdot, y)||_{\mathbb{L}^p(\mu)}\nu(\mathrm{d}y).$$

2) En déduire que pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ avec $p \in]1, \infty[$, la fonion F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

vérifie l'inégalité suivante (appelée inégalité de Hardy) :

$$||F||_p \leq \frac{p}{p-1}||f||_p.$$

Solution: 1) On suppose sans perte de généralité que $\varphi \geq 0$.

En posant une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ croissante d'ensembles mesurables de mesure finie tel que

$$X \times Y = \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

et $B_n := \{|F| \leq n\}, M_n = A_n \cap B_n, F_n = \chi_{M_n} F$, on se ramène au cas où $||F||_p < \infty$.

Posons

$$q = \frac{p}{p-1},$$

on a

$$\begin{aligned}
||F||_p^p &= \int_X F(x)^{p-1} \int_Y \varphi(x,y) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_y \int_X F(x)^{p-1} \varphi(x,y) \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int_Y ||\varphi(\cdot,y)||_p ||F^{p-1}||_q \\
&= ||F||_p^{p-1} \int_Y ||\varphi(\cdot,y)||_p,
\end{aligned}$$

donc

$$||F||_{\mathbb{L}^p(\mu)} \leq \int_Y ||\varphi(\cdot,y)||_{\mathbb{L}^p(\mu)} \nu(\mathrm{d}y).$$

2) C'est un cas particulier de 1) où $Y = [0,1], X = \mathbb{R}_+^*, \varphi(x,y) = f(x,y)$.

Remarque: Il y a plusieurs versions et preuves d'inégalité de Hardy, dans l'examen final de ce cours en 2021, on a vu une autre preuve.

Exercice 4.(Petites questions)

Répondez aux questions suivantes :

1) Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Calculer

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y f(x,y)$$

et puis
$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x f(x,y).$$
Diabolique, non ?

2) En considérant l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)},$$
calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x.$$
3) En remarquant que
$$x^{-1}\sin(x) = \int_0^1 \cos(xy)\mathrm{d}y,$$
calculer pour tout $t>0$ l'intégrale suivante
$$\int_0^{+\infty} x^{-1}\sin(x)e^{-tx}\mathrm{d}x.$$

Solution: 1) En remarquant que $x^2-y^2 = x^2+y^2-2y^2$ et en appliqant une intégration par parties, on a
$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}y f(x,y) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$
On a alors
$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y f(x,y) = \frac{\pi}{4}$$
et similairement
$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x f(x,y) = -\frac{\pi}{4}.$$
Diabolique! Oui!

Remarque: Cet exercice nous dit que l'hypothèse d'intégrabilité est nécessaire dans l'énoncé du théorème de Fubini: on vérifie facilement que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & x=y=0 \end{cases}.$$

n'est pas dans $\mathbb{L}^1([0,1]^2)$.

2) D'une part,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}y}{1+y}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\pi\mathrm{d}y}{2(1+y)\sqrt{y}}\end{aligned}$$

en posant $u=\sqrt{y}$, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)} = \pi\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)} &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{1}{1+x^y}-\frac{1}{1+y}\right)\mathrm{d}y \\ &= 2\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\ln(x)}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$$

3) D'après le théorèmes de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^{-1}\sin(x)e^{-tx}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} \cos(xy)e^{-tx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}_+} \cos(xy)e^{-tx}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{ixy}e^{-tx}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{t\mathrm{d}y}{y^2+t^2} \\
&= \arctan\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 5.(Truc de ouf)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour $\lambda-$presque tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0.$$

Solution: Posons $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = y\}$, on a A est mesurable et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \lambda(f^{-1}(\{y\}))\mathrm{d}y &= \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{f(x)\})\mathrm{d}x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc pour $\lambda-$presque tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0.$$

Remarque: On en déduit que le graphe d'une fonction borélienne $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Cette proposition reste valable pour toute fonction borélienne $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. La démonstration est laissée comme un exercice.

Exercice 6.(Quelque chose d'utile)

Sur un espace mesuré $\sigma-$fini $(E, \mathcal{A}, \mu)$, on considère $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable.

1) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_E g \circ f \mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\mathrm{d}t.$$

Indication : On pourra écrire $g(f(t))$ comme une intégrale.

2) Montrer que

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_0^{\infty} \mu(\{f \geq t\})\mathrm{d}t.$$

3) On suppose que μ est finie et qu'il existe $p \geq 1$ et $c > 0$ t.q.

$$\forall t > 0, \mu(\{|f| > t\}) \leq ct^{-p}.$$

Montrer que $f \in \mathbb{L}^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $q \in [1, p[$. A-t-on forcément $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$?

Solution: 1) On a $g' \geq 0$ est continue, et puis

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_E g'(t)\chi_{\{f(x) \geq t\}} \mathrm{d}\mu \mathrm{d}t \\
&= \int_E \int_{\mathbb{R}_+} g'(t)\chi_{\{f(x) \geq t\}} \mathrm{d}t \mathrm{d}\mu \\
&= \int_E g \circ f \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

2) Posons $g = \mathrm{id}$ et appliquons 1).

3) D'après 2), on a

$$\begin{aligned}
\int_E f^q \mathrm{d}\mu &= \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f^q \geq t\})\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f^q = t\})\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f^q > t\})\mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,1]} \mu(\{f^q > t\})\mathrm{d}t + \int_{]1,\infty[} \mu(\{f^q > t\})\mathrm{d}t + \mu(E) \\
&\leq 2\mu(E) + \int_{]1,\infty[} ct^{-\frac{p}{q}}\mathrm{d}t \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Donc $f \in \mathbb{L}^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $q \in [1, p[$.

On n'a pas forcément $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, par exemple, on prend $E =]0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, $f(x) = x^{-1}$ et $p = 1$.

Exercice 7.

Soit $\varphi : ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par

$$F(t) = \int_{[0,1]} \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\mathrm{d}x.$$

1) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que F soit dérivable en 0.

Solution: 1) c.f. Le Gall, i.e. la référence 1, Page26, Théorème 2.3.1 et Page27, Théorème 2.3.2. Les vérifications sont directes.

2) F soit dérivable en 0 $\iff$ la limite $\lim_{h\to 0} h^{-1}(F(h) - F(0))$ existe

$$\iff \lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{|\varphi(x)| + \sqrt{\varphi(x)^2 + h}} \text{ existe}$$

$$\iff \frac{1}{\varphi} \in \mathbb{L}^1.$$

Exercice 8.

Soient μ et ν deux mesures $\sigma-$finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.

2) Soit $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale de $\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).$$

Solution: 1) Voir TD2, Exercice 4, question 4).

2) D'après 1), on a

$$\begin{aligned}
\mu \otimes \nu(\Delta) &= \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{D_\mu} \mu(\{x\})\nu(\mathrm{d}x) \\
&= \sum_{x \in D_\mu} \mu(\{x\})\nu(\{x\}) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).
\end{aligned}$$

TD8.1 Radon-Nikodym et Probabilité

Exercice 1.(Contre-Exemple à Radon-Nikodym)

Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ c'est-à-dire que $m(A) = |A|$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$. On note m_0 la restriction de m à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à m_0.

2) Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot m_0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.

3) Conclure quelque chose d'intelligent et intelligible.

Solution: 1) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mu(A) = 0 \implies A = \varnothing \implies \lambda(A) = 0.$$

2) Supposons par l'absurde qu'il existe une telle fonction f, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} f \mathrm{d}m_0 = f(x) m_0(\{x\}) = f(x).$$

On a donc $f = 0$ et ainsi $\lambda = 0$, une contradiction !

3) Dans l'énoncé du théorème de Radon-Nikodym, la condition que μ et ν sont $\sigma-$finies est nécessaire.

Exercice 2.(Quantification de l'absolue continuité)

Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

1) On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \eta \implies \nu(A) \leq \varepsilon.$$

Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.

2) Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie. Que se passe-t-il si ν est infinie ?

Solution: 1) La vérification est simple.

2) On suppose par l'absurde que $\nu \ll \mu$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in \mathcal{A}$ t.q.

$$\mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \ \nu(A_n) > \varepsilon.$$

Selon le lemme de borel-Cantelli, on a $\mu(\limsup A_n) = 0$ et donc $\nu(\limsup A_n) = 0$. Mais lorsque ν est finie, on a

$$\nu(\limsup A_n) = \lim_{n \to \infty} \nu\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \geq \limsup \nu(A_n) \geq \varepsilon,$$

une contradiction !

Voici un contre-exemple lorsque ν n'est pas finie : $(E, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue et $\nu = 2x \cdot \lambda$.

Exercice 3.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne (X, Y) une v.a. (variable aléatoire) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1) On suppose que la loi de (X, Y) est $\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \chi_{\mathbb{R}_+^2}(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$. Déterminer la loi de la v.a. $U = \min(X, Y)$.

2) On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\frac{1}{4\pi} e^{-\frac{x}{2}} \chi_{\{x \geq 0\}} \chi_{[0,2\pi]}(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Déterminer la loi de la v.a. $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

3) On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Déterminer la loi de la v.a. $\dfrac{X}{Y}$.

Solution: 1) Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ borélienne quelconque, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(U)] &= \int_0^\infty \int_x^\infty F(x) \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \int_0^\infty \int_y^\infty F(y) \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty F(x) \lambda e^{-(\lambda+\mu)x} \mathrm{d}x + \int_0^\infty F(y) \lambda e^{-(\lambda+\mu)y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty F(u)(\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)u} \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Donc la loi de U est $(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)u}\chi_{\mathbb{R}_+}(u)\mathrm{d}u$.

2) Soient $(U, V) = (\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne quelconque, si

$$(x, y) = \left(u^2 + v^2, \arctan \frac{y}{x}\right),$$

alors

$$\mathrm{d}x \mathrm{d}y = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \mathrm{d}u \mathrm{d}v = 2 \mathrm{d}u \mathrm{d}v,$$

donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(U, V)] &= \int_{\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]} F(u, v) \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F(u, v) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \mathrm{d}u \mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Donc la loi de (U, V) est

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

3) Soient $U = \dfrac{X}{Y}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ borélienne quelconque, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(U)] &= \int_{\mathbb{R}^2} F\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F(u) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+1}{2} \cdot y^2} y\mathrm{d}y\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} F(u) \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)\pi}.
\end{aligned}$$

Donc la loi de U est

$$\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)\pi}.$$

Exercice 4.

Soient X, Y et Z des v.a. réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1) On suppose que $X = Y$ p.s (i.e. $\mathbb{P}-$presque partout). Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

2) On suppose que X et Y ont la même loi.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne. Montrer que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

(b) Montrer que XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Solution: 1) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A) \leq \mathbb{P}(\{X \in A\} \setminus \{Y \in A\}) \leq \mathbb{P}(X \neq Y) = 0.$$

De même façon, on a $\mathbb{P}(Y \in A) - \mathbb{P}(X \in A) \leq 0$, donc $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A)$.

La réciproque est fausse : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda), X = \mathrm{id}$, $Y = 1 - X$.

2)(a) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{P}(f(X) \in A) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)) = \mathbb{P}(Y \in f^{-1}(A)) = \mathbb{P}(f(Y) \in A).$$

(b) Voici un exemple :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, Y = 1 - X, Z = X.$$

TD8.2 Probabilité

Exercice 1.(Simulation de variables aléatoires)

Soient X une v.a. réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et F sa fonction de répartition définie par $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1) Si F est continue et strictement croissante, et si U est une variable uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de v.a. $F^{-1}(U)$?

2) Dans le cas général on définit F^{-1}, l'inverse continu à droite de F par,

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > u\}.$$

Quelle est la loi de la v.a. $F^{-1}(U)$?

Indication : On pourra vérifier que

$$\{F^{-1}(U) \leq t\} = \bigcap_{n\geq 1} \{U < F\left(t + \frac{1}{n}\right)\}.$$

3) Soit U une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$, et X la v.a. définie par

$$X = -\frac{1}{p}\ln(U).$$

Déterminer la loi de X.

Solution: 1) On calcule la fonction de répartition :

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq M) = \mathbb{P}(U \leq F(M)) = F(M),$$

donc $F^{-1}(U)$ et X ont la même loi.

2) On suit l'indication, on vérifie que

$$\{F^{-1}(U) \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \{U < F\left(t + \frac{1}{n}\right)\}.$$

(On omet la vérification directe mais lourde.)

Et puis, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \{U < F\left(t + \frac{1}{n}\right)\}\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\{U < F\left(t + \frac{1}{n}\right)\}\right) = \lim_{n \to \infty} F\left(t + \frac{1}{n}\right) \\ &= F(t).\end{aligned}$$

Donc on a encore $F^{-1}(U)$ et X ont la même loi.

3) On cacule la fonction de répartition :

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\ln(U) \geq -pt) = \mathbb{P}(U \geq e^{-pt}) = \max\{1 - e^{-pt}, 0\}.$$

Donc X a la loi exponentielle de paramètre p.

Exercice 2.(Variables exponentielles)

On étudie dans cet exercice les variables exponentielles. On dit qu'une v.a. réelle positive X vérifie la propriété d'absence de mémoire si pour tous $s, t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$

1) Trouver toutes les v.a. réelle positives qui vérifient la propriété d'absence de mémoire.

2) Soit X une v.a. exponentielle. Calculer la loi de $\lfloor X \rfloor$.

Solution: 1) On pose $f(t) = \ln \mathbb{P}(X > t)$, on a $f(t + s) = f(t) + f(s)$ et f est décroissante, elle est ainsi linéaire : $f(x) = \lambda x$, où $\lambda = -\ln \mathbb{P}(X > 1) > 0$. Donc X a la loi exponentielle de paramètre λ.

Conclusion: toute v.a. réelle positive vérifiant la propriété d'absence de mémoire est exponentielle.

2) Supposons que la loi de X est

$$p(x)\mathrm{d}x = \lambda e^{-\lambda x}\chi_{\mathbb{R}_+}\mathrm{d}x,$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\lfloor X\rfloor = n\right) = \int_n^{n+1} p(x)\mathrm{d}x = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)}.$$

Conclusion: Si X a la loi exponentielle de paramètre λ, alors $\lfloor X\rfloor$ a la loi géométrique de paramètre $e^{-\lambda}$.

Exercice 3.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une v.a. N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

Calculer la loi de $\dfrac{1}{N^2}$.

Solution: Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\mathbb{E}[F(N^{-2})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_+} F\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

D'après la formule du changement de variables, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} F\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} F\left(u\right)e^{-\frac{1}{2u}}(2u^{\frac{3}{2}})^{-1}\mathrm{d}u.$$

Donc le loi de N^{-2} est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}e^{-\frac{1}{2u}}\chi_{\{u>0\}}\mathrm{d}u.$$

Exercice 4.

Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probablitié μ telle que $F(x) \in \{0,1\}$ pour tout $x \in D$, où D est un ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que μ est une mesure de Dirac.

Solution: Puisque F est continue à droite, on a $F(x) \in \{0,1\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$a = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}.$$

Comme

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$

on a $a \in \mathbb{R}$. Puisque F est continue à droite, on a

$$F = \chi_{[a,+\infty[}$$

qui est la fonction de répartition de δ_a.

Exercice 5.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $(X_1, \cdots, X_n)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi

$$\chi_{[0,1]^n}(x_1, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

1) Construire, à l'aide des événements

$$A_\sigma = \{X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\}$$

pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n v.a. $Y_1, \cdots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que

$$Y_1(\omega) \leq \cdots \leq Y_n(\omega)$$

et

$$\{Y(\omega), \cdots, Y_n(\omega)\} = \{X(\omega), \cdots, X_n(\omega)\}$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

2) Déterminer les lois des v.a. $(Y_1, \cdots, Y_n)$ et $\left(\frac{Y_1}{Y_2}, \cdots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)$.

Solution: 1) Nous donons directement la construction :

$$Y_i(\omega) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X_{\sigma(i)}(\omega) \chi_{\{X_{\sigma(1)}(\omega) < \cdots < X_{\sigma(n)}(\omega)\}}$$

Les Y_i sont bien définies car la mesure de Lebesgue des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ où deux coordonnées sont égales est nulle.

2) Soit $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(Y_1, \cdots, Y_n)] &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \int_{\{0 \leq x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)} \leq 1\}} f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&= n! \int_{\{0 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq 1\}} f(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.
\end{aligned}$$

La loi de $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est donc

$$n! \chi_{\{0 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq 1\}} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Soit maintenant $g :]0,1[^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne, on a

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y_1}{Y_2}, \cdots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right] = n! \int_{\{0 < x_1 < \cdots < x_n < 1\}} g\left(\frac{x_1}{x_2}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

D'après la formule du changement de variables et puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y_1}{Y_2}, \cdots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right] &= n! \int_{]0,1[^n} g(u_1, \cdots, u_{n-1}) u_2 u_3^2 \cdots u_n^{n-1} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n \\
&= (n-1)! \int_{]0,1[^{n-1}} g(u_1, \cdots, u_{n-1}) u_2 u_3^2 \cdots u_{n-1}^{n-2} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}.
\end{aligned}$$

La loi de $\left(\frac{Y_1}{Y_2}, \cdots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)$ est donc

$$(n-1)! u_2 u_3^2 \cdots u_{n-1}^{n-2} \chi_{]0,1[^{n-1}} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_{n-1}.$$

Remarque: On obtient aussi que les $n-1$ v.a.

$$\frac{Y_1}{Y_2}, \cdots, \frac{Y_{n-1}}{Y_n}$$

sont indépendantes, chaque $\dfrac{Y_i}{Y_{i+1}}$ est de loi

$$iy^{i-1}\chi_{]0,1[}(y)\mathrm{d}y.$$

Exercice 6.

On considère un jeu de 52 cartes bien mélangé, posé face caché sur une table. On retourne une à une les cartes jusqu'à trouver une dame. Combien de cartes aura-t-on vu en moyenne ?

Solution: On place toutes les cartes (face visible) en cercle sur la table (de sorte qu'on voit toutes les cartes), et on ajoute une cinquième dame fictive entre la première carte du paquet et la dernière carte du paquet.

Les 53 cartes sont ainsi partionnées en cinq intervalles qui ont même loi (chaque intervalle commençant par la carte suivant une dame et finissant par une dame), de sorte que le nombre moyen de cartes dans le premier intervalle est $\dfrac{53}{5}$.

Le nombre de cartes qu'on aura vu étant le nombre de cartes entre la cinquième dame (excluse) et la première dame (incluse), on aura donc vu en moyenne $\dfrac{53}{5}$ cartes.

Remarque: Si on a N cartes bien mélangé contenant 4 dames, la réponse sera $\dfrac{N+1}{5}$.

L'examen Oral I et Préparation d'examen Partiel

Dans ce chapitre, on introduit quelques problèmes dans le premier examen oral et l'examen partiel, quelques exercices dans les feuilles des TD qui ne sont pas résolus aux cours et quelque problèmes intéressants hors TD. On donnera des solutions et des remarques.

Exercice 1.(Fonctions réelles additives)

Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est mesurable et additive (i.e. $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$) est linéaire.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(rx) = rf(x)$.

2) Montrer que si le graphe de f n'est pas dense dans le plan, alors f est linéaire.

3) Soit $A \subset \mathbb{R}$ un borélien de mesure de Lebesgue strictement positive. Montrer que l'ensemble

$$A - A := \{x - y : x, y \in A\}$$

contient un intervalle ouvert centré en 0.

4) Montrer que si f est mesurable, alors elle est bornée sur un voisinage de 0.

5) Conclure.

Solution: 1) Facile.

2) On pose

$$A = \{\frac{f(x)}{x} : x \in \mathbb{R}^*\} \subset \mathbb{R},$$

Si le graphe de f n'est pas dense dans le plan, alors $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas dense. Si f n'est pas linéaire, alors $|A| > 1$. On observe de plus que pour tout $x, y \in A, x < y$, on a $A \cap [x, y]$ est dense dans $[x, y]$, donc A est soit supérieurement borné, soit inférieurement borné. On suppose sans perte de généralité que A est supérieurement borné, dit $A \subset]-\infty, M]$.

Soit

$$x = \frac{f(a)}{a} \in A, \quad y = \frac{f(b)}{b} \in A,$$

alors, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$, on a

$$pa + qb > 0 \implies pa(M - x) + pb(M - y) \geq 0,$$

donc $M - x = M - y$, ainsi $x = y$. Ce qui contredit que $|A| > 1$.

3) Soit $\alpha \in]0, 1[$ quelconque, par la régularité supérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ensemble ouvert $O \supset A$ avec

$$\lambda(A) \geq \alpha\lambda(O).$$

On écrit O comme la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, on a alors, il existe au moins un intervalle I dans cette famille satisfiant

$$\lambda(A \cap I) \geq \alpha\lambda(I).$$

On pose $A_0 = A \cap I$, il suffit de montrer que $A_0 - A_0$ contient un intervalle ouvert centré en 0. On suppose par l'absurde que pour tout $n \geq 1$, il existe a_n avec

$$|a_n| < \frac{1}{n} \text{ et } A_0 \cap (A_0 + a_n) = \varnothing.$$

On a alors

$$2\alpha\lambda(I) \leq \lambda(A_0) + \lambda(A_0 + a_n) = \lambda(A_0 \cup (A_0 + a_n)) \leq \lambda(I \cup (I + a_n)) = \lambda(I) + |a_n|.$$

On prend $\alpha = \dfrac{3}{4}$ et on obtient une contradiction.

4) D'après le théorème de Lusin, f est continue sur un compact K de mesure finie et strictement positive, elle est donc borné sur K.

D'après 3), $K - K$ contient un intervalle ouvert I centré en 0, alors f est bornée sur I.

5) D'après 4), le graphe de f n'est pas dense dans le plan, donc f est linéaire.

Exercice 2.

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma-$fini et $p \in [1, \infty[$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout fonction $f \in \mathbb{L}^p$, on a $fg \in \mathbb{L}^p$. Montrer que $g \in \mathbb{L}^\infty$.

Solution: Posons

$$E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$$

avec $\forall n \geq 1, \mu(E_n) < \infty$.

On suppose par l'absurde que $g \notin \mathbb{L}^\infty$, alors il existe un sous-ensemble A infini de $\mathbb{N}$ t.q.

$$\exists k \geq 1, \forall n \in A, \mu(E_{n,k} := \{x \in E_k : 2^n \leq g(x) < 2^{n+1}\}) > 0.$$

On pose

$$f = \sum_{n \in A} 2^{-n} \chi_{E_{n,k}} \mu(E_{n,k})^{-\frac{1}{p}},$$

alors on a

$$||f||_p^p = \sum_{n \in A} 2^{-pn} \mu(E_{n,k}) \leq \mu(E_k) < \infty,$$

mais

$$||fg||_p^p \geq \sum_{n \in A} 1 = \infty,$$

une contradiction !

Exercice 3.

Trouver la limite de la suite

$$u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathrm{d}t.$$

Solution: On a

$$u_n = \int_{]0,1]} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathrm{d}t + \int_{]1,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathrm{d}t.$$

Par TCD, on obtient que

$$\int_{]1,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathrm{d}t \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,$$

et que

$$\int_{]0,1]} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Donc $u_n \to \ln 2$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 4.(L'inégalité de Brunn-Minkowski)

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit $\beta = 1 - \alpha$.

1) Soient K et K' deux compacts non-vides de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lambda(K) + \lambda(K') \leq \lambda(K + K').$$

2) Soient E et E' deux boréliens non-vides de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lambda(E) + \lambda(E') \leq \lambda(E + E').$$

3) Soient $h, h_1, h_2 : \mathbb{R} \to [0,1]$ des fonctions boréliennes tels que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, h(\alpha x + \beta y) \geq h_1(x)^\alpha h_2(y)^\beta.$$

Soient $s \in [0,1]$ et

$$E := \{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq s\} \quad E_1 := \{x \in \mathbb{R} : h_1(x) \geq s\} \quad E_2 := \{x \in \mathbb{R} : h_2(x) \geq s\}.$$

Montrer que, si E_1 et E_2 sont non-vides, alors

$$\lambda(E) \geq \alpha\lambda(E_1) + \beta\lambda(E_2).$$

4) Soient $h, h_1, h_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ des fonctions boréliennes tels que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, h(\alpha x + \beta y) \geq h_1(x)^\alpha h_2(y)^\beta.$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}} h_1(x)\mathrm{d}x\right)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}} h_2(x)\mathrm{d}x\right)^\beta.$$

5) Soient $h, h_1, h_2 : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ des fonctions boréliennes tels que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, h(\alpha x + \beta y) \geq h_1(x)^\alpha h_2(y)^\beta.$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} h_1(x)\mathrm{d}x\right)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^d} h_2(x)\mathrm{d}x\right)^\beta.$$

6) Soient A et B deux boréliens de $\mathbb{R}^d$, montrer que

$$\lambda(A)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B)^{\frac{1}{d}} \leq \lambda(A+B)^{\frac{1}{d}}.$$

Solution: 1) Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on peut supposer sans perte de généralité que

$$\sup K = \inf K' = 0.$$

On a alors

$$K \cup K' \subset K + K',$$

donc

$$\lambda(K) + \lambda(K') \leq \lambda(K \cup K') \leq \lambda(K + K').$$

2) On peut supposer d'abord que E et E' sont de mesure de Lebesgue finie, car sinon, il n'y a rien à montrer. L'inégalité cherchée découle de la question précédente et de la régularité inférieure de la mesure de Lebesgue.

3) Puisque h, h_1, h_3 sont boréliennes, on a E, E_1, E_2 sont boréliennes.

Comme

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, h(\alpha x + \beta y) \geq h_1(x)^\alpha h_2(y)^\beta,$$

on a

$$\alpha E_1 + \beta E_2 \subset E.$$

Il suffit d'utiliser L'inégalité prouvée dans la question précédente.

4) On peut supposer d'abord que

$$\lambda(A = \{h = \infty\}) = 0,$$

car sinon, il n'y a rien à montrer. Posons

$$A_1 = \{h_1 = \infty\}, \quad A_2 = \{h_2 = \infty\}.$$

Puisqu'on a

$$\alpha A_1 + \beta A_2 \subset A,$$

on obtient d'après 2) que

$$\lambda(A_1 = \{h_1 = \infty\}) = 0, \lambda(A_2 = \{h_2 = \infty\}) = 0.$$

On compose chaque fonction par $\chi_{[0,n]}$ et on applique le TCM, on se ramène au cas où h, h_1, h_2 sont bornées, ce cas est bien traité dans la question précédente.

5) On raisonne par récurrence sur la dimension d, le cas $d = 1$ est montré dans la question précédente. Supposons qu'on a montré pour dimension $d - 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{d-1}$, on pose

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}} h(x, z)\mathrm{d}z, \quad f_1(x) := \int_{\mathbb{R}} h_1(x, z)\mathrm{d}z, \quad f_2(x) := \int_{\mathbb{R}} h_2(x, z)\mathrm{d}z.$$

On vérifie par l'inégalité de Hölder que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{d-1}, f(\alpha x + \beta y) \geq f_1(x)^\alpha f_2(y)^\beta,$$

et puis le résultat découle de l'hypothèse de récurrence et du théorème de Fubini-Tonelli.

6) On peut supposer d'abord que $\lambda(A+B), \lambda(A), \lambda(B) \in]0, \infty[$, car sinon, il n'y a rien à montrer. Puis on pose

$$A_1 = \lambda(A)^{-\frac{1}{d}} A, \quad B_1 = \lambda(B)^{-\frac{1}{d}} B, \quad \alpha = \frac{\lambda(A)^{-\frac{1}{d}}}{\lambda(A)^{-\frac{1}{d}} + \lambda(B)^{-\frac{1}{d}}}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

On vérifie que les 3 fonctions

$$f = \chi_{\alpha A_1 + \beta B_1}, \quad f_1 = \chi_{A_1}, \quad f_2 = \chi_{B_1}$$

satisfaient les hypothèses de la question précédente, d'où le résultat.

Remarque: L'inégalité dans 6) est appelée l'inégalité de Brunn-Minkowski, pour une autre démonstration, c.f. référence 4, Chapitre 1, Section 5.

Exercice 5.

Soient $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Soient $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux fonctions mesurables monotones de même sens. On suppose de plus que f, g et fg sont dans $\mathbb{L}^1(\mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \mathrm{d}\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu.$$

Indication : on pourra considérer la fonction

$$F(x, y) := (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)).$$

Solution: La fonction F est clairement positive, donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y) \geq 0.$$

De plus, comme $f, g \in \mathbb{L}^1(\mu)$, on a par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)||g(y)| \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\mu(y) = ||f||_1 ||g||_1 < \infty.$$

Puisque μ est une mesure de probabilité et par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) &= 2\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) - 2\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\\ &= 2\int_{\mathbb{R}} fg\mathrm{d}\mu - 2\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat.

Exercice 6.

Soit f mesurable sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$. On suppose que $f \in \mathbb{L}^{p_0}$ pour au moins un $p_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

2) On suppose de plus que $\mu(E) = 1$, montrer que

$$\lim_{p\to 0} ||f||_p = \exp\left(\int_E \ln|f|\right).$$

Solution: 1) Si $||f||_\infty = \infty$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $m_n := \mu(\{|f| \geq n\}) > 0$. Dans ce cas, on a $||f||_p \geq (a_n n^p)^{\frac{1}{p}} \to n$, donc on a

$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq \infty,$$

ainsi

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

Si $0 < ||f||_\infty < \infty$, alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on a

$$||f||_p \geq ||f||_\infty(1-\varepsilon)\mu(\{|f| > ||f||_\infty(1-\varepsilon)\})^{\frac{1}{p}},$$

donc

$$\liminf_{p\to\infty} ||f||_p \geq ||f||_\infty.$$

Par ailleurs, pour $p > p_0$, on a

$$||f||_p^p \leq ||f||_\infty^{p-p_0} ||f||_{p_0}^{p_0} < \infty,$$

on obtient que

$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq ||f||_\infty,$$

donc

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$

Si $||f||_\infty$, il n'y a rien à montrer.

2) En appliquant l'inégalité de Hölder, on peut facilement montrer que $p \to ||f||_p$ est croissante, donc la limite existe.

Remarquons que le résultat voulu est équivalent à

$$\lim_{p\to 0} p^{-1} \ln \int |f|^p = \int \ln |f|.$$

L'inégalité de Jensen donne immédiatement

$$\lim_{p\to 0} p^{-1} \ln \int |f|^p \geq \int \ln |f|.$$

De plus, on a

$$||f||_p^p = 1 + \int (|f|^p - 1) \leq e^{\int (|f|^p - 1)},$$

donc il suffit de montrer que

$$\lim_{p\to 0} \int \frac{|f|^p - 1}{p} = \int \ln |f|.$$

Sur $\{|f| = 1\}$, on a

$$\int \frac{|f|^p - 1}{p} = \int \ln |f| = 0;$$

Sur $\{|f| < 1\}$, on raisonne par TCM ;

Sur $\{|f| > 1\}$, on raisonne par TCD : dominée par

$$\frac{|f|^{p_0} - 1}{p_0}.$$

Exercice 7.(Espace de Sobolev sur $]0,1[$)

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions réelles $f \in \mathbb{L}^2(]0,1[,\lambda)$, pour lesquelles il existe une fonction $\Lambda_f \in \mathbb{L}^2(]0,1[,\lambda)$ telle que

$$\forall \varphi \in C_c^1(]0,1[), \quad \int_0^1 f\varphi' \mathrm{d}\lambda = -\int_0^1 \Lambda_f \varphi \mathrm{d}\lambda.$$

1) On considère un «noyau de convolution» $\rho \in C_c^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ vérifiant

$$\int_R \rho \mathrm{d}\lambda = 1,$$

et pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

En se servant des noyaux de convolution $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$, montrer que l'espace $C_c^1(]0,1[)$ est dense dans $C_c^0(]0,1[)$ pour la norme sup. En déduire que $C_c^1(]0,1[)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(]0,1[)$ (pour la norme $||\cdot||_2$.)

2) Pour $f \in \mathcal{S}$, montrer que $\Lambda_f \in \mathbb{L}^2$ est unique.

3) Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}^2(]0,1[)$.

4) Trouver Λ_f pour $f \in C_c^1(]0,1[)$.

5) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathbb{L}^2(]0,1[)$.

6) Posons pour $f, g \in \mathcal{S}$, leur produit scalaire

$$(f,g)_{\mathcal{S}} := \int_0^1 fg \mathrm{d}\lambda + \int_0^1 \Lambda_f \Lambda_g \mathrm{d}\lambda,$$

montrer que c'est un produit scalaire euclidien bien défini. On note $||\cdot||_{\mathcal{S}}$ la norme euclidienne associée.

7) Montrer que $\mathcal{S}$ est complet pour cette norme.

Solution: 1) On pose

$$\rho(x) = \begin{cases} C \cdot e^{\frac{1}{|x^2|-1}}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases},$$

avec C bien choissit, c'est bien un «noyau de convolution». Pour $f \in C_c^0(]0,1[)$, on pose $f_\varepsilon := f \star \rho_\varepsilon$. On obtient facilement que $f_\varepsilon \in C_c^1(]0,1[)$ et que $f_\varepsilon \rightrightarrows f$.

2) S'il existe deux telles fonctions $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{L}^2$, alors pour tout $\varphi \in C_c^1(]0,1[)$, on a

$$\int_0^1 \Lambda_1 \varphi \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \Lambda_2 \varphi \mathrm{d}\lambda.$$

Comme $C_c^1(]0,1[)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(]0,1[)$ pour la norme $||\cdot||_2$, on obtient que $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

3) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{S}$, on vérifie que

$$\Lambda_{\alpha f + \beta g} = \alpha \Lambda_f + \beta \Lambda_g.$$

4) $\Lambda_f = f'$.

5) Puisque $C_c^1(]0,1[) \subset \mathcal{S}$ et que $C_c^1(]0,1[)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(]0,1[)$, on obtient que $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathbb{L}^2(]0,1[)$.

6) On a évidemment la symétrie $(f,g)_{\mathcal{S}} = (g,f)_{\mathcal{S}}$, la positivité $(f,f)_{\mathcal{S}} \geq 0$ et

$$(f,f)_{\mathcal{S}} \geq 0 \implies ||f||_2 = 0 \implies f = 0,$$

et la linéarité $(af_1 + bf_2, g)_{\mathcal{S}} = a(f_1,g)_{\mathcal{S}} + b(f_2,g)_{\mathcal{S}}$.

7) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy pour la norme $||\cdot||_{\mathcal{S}}$, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ et (Λ_{f_n}) sont deux suites de Cauchy pour la norme $||\cdot||_2$. Puisque $\mathbb{L}^2$ est complet, il existe deux fonctions $f, \Lambda \in \mathbb{L}^2$ t.q. $||f_n - f||_2 \to 0$ et que $||\Lambda_{f_n} - \Lambda||_2 \to 0$, on vérifie alors que $\Lambda_f = \Lambda$.

Remarque: Pour savoir plus sur les espaces de Sobolev, c.f. référence 7, Chapitre 4.

Exercice 8.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable pour les tribus borélienne associées. On pose

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))\mathrm{d}t}{1+t^2}, x \geq 0.$$

1) Montrer que F est continue.

2) Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.

3) Montrer que F est dérivable sur $]0, \infty[$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Solution: 1) c.f. Le Gall, i.e. la référence 1, Page26, Théorème 2.3.1. Les vérifications sont directes.

2) Par TCM, on a

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{2} \int_{\{f\neq 0\}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

3) c.f. Le Gall, i.e. la référence 1, Page27, Théorème 2.3.2. Les vérifications sont directes.

4) Par TCM, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\arctan(xf(t))\mathrm{d}t}{x(1+t^2)} = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

donc la condition voulue est

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1+t^2} < \infty.$$

TD9.1 Semaine 9, Mardi

Exercice 1.

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire n boules sans remise de cette urne et on note X le plus petit des numéros tirés.

(a) Décrire l'espace probalilisé associé à cette experience.

(b) On suppose que $n = 3$. Calculer $\mathbb{P}(X = 8)$ et $\mathbb{P}(X \geq 8)$.

(c) On revient au cas général où ≤ 20. Calculer de façon indépendante:

i). $\mathbb{P}(X = k)$;

ii). $\mathbb{P}(X \geq k)$.

Solution: (a) $\Omega := \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in \{1, 2, \cdots, 20\} \text{ et } i \neq j \implies a_i \neq a_j\}$ muni de la probabilité uniforme.

(b) Posons $A = \{X = 8\}$, on a $|A| = 3 \times 12 \times 11$, donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3 \times 12 \times 11}{20 \times 19 \times 18} = \frac{11}{190}.$$

Posons $B = \{X \geq 8\}$, on a $|B| = 13 \times 12 \times 11$, donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{13 \times 12 \times 11}{20 \times 19 \times 18} = \frac{143}{570}.$$

(c) i) On a

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \dfrac{n \times (20-k)!}{(20-k-n+1)!}, & k \leq 20 - n + 1 \\ 0, & k > 20 - n + 1 \end{cases}.$$

ii) On a

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \begin{cases} \frac{(20-k+1)!}{(20-k-n)!}, & k \leq 20-n+1 \\ 0, & k > 20-n+1 \end{cases}.$$

Exercice 2.

Soit T une v.a. entière définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que T n'est pas égale à $+\infty$ presque sûrement, que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(T \geq n) > 0$ et que pour tous $n, p \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(T \geq n+p | T \geq n) = \mathbb{P}(T \geq p)$. Montrer que T suit une loi géométrique.

Solution: Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(T \geq n+p) = \mathbb{P}(T \geq n+p|T \geq n)\mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}(T \geq p)\mathbb{P}(T \geq n).$$

Posons $a = \mathbb{P}(T \geq 1)$, alors $\mathbb{P}(T \geq n) = a^n$. Puisque

$$0 = \mathbb{P}(T = \infty) = \mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 1}\{T \geq n\}) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(T \geq n) = \lim_{n \to \infty} a^n,$$

on obtient que $0 < a < 1$. On a alors $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geq n) - \mathbb{P}(T \geq n+1) = a^n(1-a)$.

Exercice 3.(Remarques sur les fonctions caractéristiques)

La fonction caractéristique d'une v.a. X est la fonction $\Phi : \xi \in \mathbb{R} \to \mathbb{E}(e^{i\xi X})$.

(a) Montrer que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\Phi(\xi)| = 1.$$

(b) Montrer que Φ est une fonction continue.

(c) Montrer que si X est une v.a. symétrique (telle que $-X$ a même loi que X), alors Φ est à valeurs réelles.

(d) Montrer que s'il existe $\xi > 0$ tel que $|\Phi(\xi)| = 1$, alors le support de X est inclus dans $a\mathbb{Z} + b$, avec a et b que l'on précisera.

Solution: (a) On a

$$|\Phi(\xi)| = \mathbb{E}(e^{i\xi X}) = \left|\int e^{i\xi X}\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x)\right| \leq \int |e^{i\xi X}|\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x) = 1$$

et $\Phi(0) = 1$, donc

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\Phi(\xi)| = 1.$$

(b) Puisque $|e^{itX}| \leq 1$, on a $|\Phi(t+h) - \Phi(t)| = |\mathbb{E}(e^{i(t+h)X} - e^{itX})| \leq \mathbb{E}(|e^{itX} - 1|)$. Par TCD, on montre que Φ est uniformément continue.

(c) Comme $-X$ a même loi que X, on obtient que

$$\Phi(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi X}) = \mathbb{E}(e^{-i\xi X}) = \overline{\Phi(\xi)},$$

donc Φ est à valeurs réelles.

(d) Supposons que $\Phi(\xi) = e^{i\eta}$ avec $\eta \in \mathbb{R}$, on a

$$1 = \mathbb{E}(e^{i(\xi X - \eta)}) = \mathbb{E}(\cos(\xi X - \eta)).$$

Donc p.s., $\xi X - \eta \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, donc le support de X est inclus dans $a\mathbb{Z} + b$, avec

$$a = \frac{2\pi}{\xi} \text{ et } b = \frac{\eta}{\xi}.$$

Exercice 4.

Calculer la fonction caractéristique des lois suivantes:

(a) Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.

(b) Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$.

(c) Géométrique de paramètres $p \in]0,1[$.

(d) Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(e) Exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

(f) Uniforme sur $[0,1]$.

Solution: (a) $\phi(\xi) = pe^{i\xi} + 1 - p$.

(b) $\phi(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (pe^{i\xi})^k (1-p)^{n-k} = (pe^{i\xi} + 1 - p)^n$.

(c) $\phi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} (1-p)(pe^{i\xi})^k = \dfrac{1-p}{1-pe^{i\xi}}$.

(d) $\phi(\xi) = \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda} \dfrac{(\lambda e^{i\xi})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{i\xi-1})}$.

(e) On a

$$\phi(\xi) = \int_0^\infty e^{i\xi x} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}.$$

(f) On a

$$\phi(\xi) = \int_0^1 e^{i\xi x} \mathrm{d}x = \frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi}.$$

Exercice 5.

Répondez aux questions suivantes :

(a) Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\chi_{\{|x|<1\}}$.

(b) Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $\dfrac{1-\cos x}{\pi x^2}$?

Solution: (a) On a

$$\phi(\xi) = \int_{-1}^1 (1-|x|) e^{i\xi x} \mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1-x)\cos \xi x \mathrm{d}x = \frac{2(1-\cos\xi)}{\xi^2}.$$

(b) On utilise le théorème d'inversion suivant :

Théorème: Soit X une v.a. avec une function caratéristique ϕ intégrable, alors elle admet une densité

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ity} \phi(t) \mathrm{d}t.$$

Pour une preuve, c.f. R.Durrett, i.e. la référence 5, Thm3.3.5.

D'après (a) et le théorème d'inversion, on obtient que

$$\Phi(t) = (1-|t|)\chi_{\{|t|<1\}}.$$

Exercice 6.(Dérivabilité de la fonction caractéristique)

Soit X une v.a. réelle et ϕ sa fonction caractéristique.

(a) On suppose que X admet un moment d'ordre $n \geq 1$. Montrer que ϕ est de classe C^n et que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on a $\phi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k \exp(itX))$. En déduire une formule pour $\mathbb{E}(X^k)$ à partir de la fonction caractéristique ϕ.

(b) Réciproquement, on suppose que ϕ est deux fois dérivable en 0. En considérant

$$\frac{\phi(t) + \phi(-t) - 2}{t^2},$$

montrer que $\mathbb{E}(X^2) = -\phi''(0) < \infty$.

(c) Plus généralement, montrez que si ϕ est k fois dérivable en 0, alors X demet un moment d'ordre $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

(d) On définit la loi de probabilité

$$\nu = c \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 \ln k} (\delta_k + \delta - k).$$

Montrer que la fonction caractéristique de ν est derivable en 0. Une v.a. de loi ν admet-elle un moment d'ordre 1 ?

Solution: (a) On a d'abord

$$\phi(t) = \int e^{itX} \mathbb{P}(\mathrm{d}X),$$

et de plus $|(iX)^k e^{itX}| = |X|^k$ est intégrable pour $1 \leq k \leq n$.

Donc on vérifie par récurence que $\phi \in C^k$ et que

$$\phi^{(k)}(t) = (i)^k \mathbb{E}(X^k e^{itX}).$$

Ainsi on a

$$\mathbb{E}(X^k) = (-i)^k \phi^{(k)}(0).$$

(b) D'abord on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(t) + \phi(-t) - 2}{t^2} = \phi''(0).$$

De plus, par lemme de Fatou,

$$-\phi''(0) = -\liminf_{t\to 0} \frac{\phi(t)+\phi(-t)-2}{t^2} \geq \mathbb{E}\left(\liminf_{t\to 0} \frac{2(1-\cos tX)}{t^2}\right) = \mathbb{E}(X^2).$$

Donc $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ et d'après 1), $\mathbb{E}(X^2) = -\phi''(0)$.

(c) On raisonne par récurence et on omet l'argument.

(d) Une v.a. de loi ν n'admet pas un moment d'ordre 1 :

$$\mathbb{E}(|X|) = 2c \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k \ln k} = +\infty.$$

Pour la fonction caractéristique, on a

$$\phi(t) = 2c \sum_{k\geq 2} \frac{\cos kt}{k^2 \ln k},$$

on a

$$0 \leq \frac{1-\phi(t)}{t} = c \sum_{k\geq 2} \frac{2(1-\cos kt)}{tk^2 \ln k} \leq 4c \sum_{k\geq 2} \frac{\min\{1,(kt)^2\}}{tk^2 \ln k} \leq 4c(A+B),$$

où

$$A = \sum_{k\geq 2, kt\leq 1} \frac{t}{\ln k}, \quad B = \sum_{k\geq 2, kt\geq 1} \frac{1}{tk^2 \ln k},$$

Puisque

$$\begin{aligned}\int_2^{\frac{1}{t}} \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x &= \left.\frac{x}{\ln x}\right|_2^{\frac{1}{t}} + \int_2^{\frac{1}{t}} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^2} \\ &\leq \left.\frac{x}{\ln x}\right|_2^{\frac{1}{t}} + \int_2^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^2} + \int_{e^2}^{\frac{1}{t}} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^2} \leq \left.\frac{x}{\ln x}\right|_2^{\frac{1}{t}} + C_0 + \frac{1}{2}\int_2^{\frac{1}{t}} \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

on a

$$\int_2^{\frac{1}{t}} \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x \leq C - \frac{2}{t\ln t}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned}0 \leq A = \sum_{k\geq 2, kt\leq 1} \frac{t}{\ln k} &\leq \frac{t}{\ln 2} + t\int_2^{\frac{1}{t}} \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x \\ &= C't - \frac{2}{\ln t} \to 0.\end{aligned}$$

On a aussi

$$0 \leq B = \sum_{k \geq \frac{1}{t}} \frac{1}{tk^2 \ln k} \leq -\frac{1}{t \ln t} \int_{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor - 1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq -\frac{C''}{\ln t} \to 0,$$

donc

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \phi(t)}{t} = 0$$

ainsi la fonction caractéristique de ν est derivable en 0.

Exercice 7.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles. On note $\phi_n(t) = \phi_{X_n}(t)$ pour simplifier, et on suppose qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue en 0, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_n(t) \to \phi(t) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

(a) Prouver que pour tout $a > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{2}{a} \right) \leq \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} (1 - \mathrm{Re}(\phi_n(u)))\mathrm{d}u = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} (1 - \phi_n(u))\mathrm{d}u.$$

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{1}{u} \int_{-u}^{u} |1 - \phi_n(t)|\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

(c) En déduire que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1, \mathbb{P}(|X_n| > a) < 2\varepsilon.$$

Solution: (a) On a évidemment

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^{a} (1 - \mathrm{Re}(\phi_n(u)))\mathrm{d}u = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} (1 - \phi_n(u))\mathrm{d}u.$$

De plus, par Fubini, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\phi_n(u))\mathrm{d}u &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\int_{\mathbb{R}}(1-e^{itX})\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}\mathrm{d}u = 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin ax}{ax}\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}\\ &\geq 2\int_{|X|\geq\frac{2}{a}}\left(1-\frac{1}{|ax|}\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n} \geq 2\int_{|X|\geq\frac{2}{a}}\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\mathbb{P}_{X_n}\\ &= \mathbb{P}\left(|X_n|>\frac{2}{a}\right).\end{aligned}$$

(b) En appliquant TCD et en utilisant la continuité de ϕ.

(c) D'après (a) et (b).

Exercice 8.

Répondez aux questions suivantes :

(a) Montrer, pour tout couple (X,Y) de v.a., l'inégalité:

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq (\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2))^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Montrer qu'il existe un entier p_n ne dépendant que de n, tel que la propriété suivante soit satisfaite: pour tout $n-$uplet de v.a. $(X_1,\cdots,X_n)$, si pour tout $k\leq n, \mathbb{E}(|X_k|^{p_n})<\infty$, alors: $\mathbb{E}(|X_1X_2\cdots X_n|)<\infty$.

(c) Soient $G_1,G_2,\cdots,G_n, n$ v.a. telles que, pour tout k, G_k soit une variable gaussienne centrée de variance σ_k. Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$, dépendant de n, et des réels $\sigma_k^2, k=1,2,\cdots,n$, tel que:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\varepsilon\sum_{k=1}^{n}G_k^2\right)\right)<\infty.$$

Solution: (a) En appliquant l'inégalité de Hölder.

(b) $p_n = 2^{n-1}$, récurrence.

(c) Il suffit de prendre $\varepsilon>0$ t.q. pour tout $1\leq k\leq n$, on a

$$\varepsilon p_n \leq \frac{1}{2\sigma_k^2}.$$

TD9.2 Semaine 9, Jeudi

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi définie par:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p, \mathbb{P}(X_n = 1) = p, \text{ avec } 0 < p < 1.$$

On pose

$$Y_n = X_n X_{n+1}, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad V_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

(a) Calculer $\mathbb{E}(S_n), \mathbb{E}(V_n)$.

(b) Calculer $\mathrm{Var}(S_n)$, $\mathrm{Var}(V_n)$ et $\mathrm{Cov}(S_n, V_n)$.

Solution: (a) Puisque $\mathbb{E}(X_n) = p$ et par l'indépendance des X_n on obtient que

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+1}) = p^2.$$

Donc $\mathbb{E}(S_n) = np, \mathbb{E}(V_n) = np^2$.

(b) Par l'indépendance des X_n, $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_n) = np(1-p)$.

De plus, on a $\mathrm{Var}(V_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.

Pour $j > i+1$, on a Y_i et Y_j sont indépendantes, donc $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$; pour $j = i+1$, on a $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}) - p^4 = p^3(1-p)$.

Comme $\mathrm{Var}(Y_i) = p^2(1-p^2)$, on a $\mathrm{Var}(V_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$.

Enfin, $\mathrm{Cov}(S_n, V_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_i) + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_{i-1})$.

On a $\mathrm{Cov}(X_i, Y_i) = \mathbb{E}(X_i Y_i) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_i) = p^2(1-p)$; $\mathrm{Cov}(X_i, Y_{i-1}) = p^2(1-p)$, donc $\mathrm{Cov}(S_n, V_n) = (2n-1)p^2(1-p)$.

Exercice 2.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. de Bernoulli de paramètre $p, (0 < p < 1)$, indépendantes.

(a) Soit $A_n = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \neq X_{n-1}(\omega)\}, n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1})$ pour $n \geq 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les A_n soient indépendants.

(b) Soit $\nu(\omega) = \inf\{n \geq 2 : \omega \in A_n\}$, avec $\inf \varnothing = +\infty$. Montrer que ν est une v.a. Quelle est sa loi ? Montrer que $\mathbb{P}(\nu = +\infty) = 0$.

Solution: (a) $A_n \cap A_{n+1} = \{X_{n-1} = X_{n+1=0, X_n=1}\} \sqcup \{X_{n-1} = X_{n+1} = 1, X_n = 0\}$. Donc $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) = p^2(1-p) + p(1-p)^2 = p(1-p)$.

On a $\mathbb{P}(A_n) = 2p(1-p)$, donc si les A_n sont indépendants, on a

$$p(1-p) = \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1}) = 4p^2(1-p)^2,$$

alors $p = \dfrac{1}{2}$.

Inversement, si $p = \dfrac{1}{2}$, on montre par récurrence que les A_n sont indépendants.

(b) $\mathbb{P}(\nu = n) = (1-p)p^{n-1} + (1-p)^{n-1}p$, donc

$$\mathbb{P}(\nu = +\infty) = 1 - \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(\nu = n) = 0.$$

Exercice 3.

Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer les loi des v.a. $U = \min(X_1, X_2)$ et $V = \max(X_1, X_2)$. En déduire les densités de probabilité correspondantes. Que vaut $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$?

Solution: Pour $t \in [0, 1]$, on a

$$\mathbb{P}(U \leq t) = 1 - \mathbb{P}(U > t) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)\mathbb{P}(X_2 > t) = 1 - (1-t)^2 = 2t - t^2.$$

Donc la densité de U est $2(1-t)\chi_{[0,1]}$. Similairement,

$$\mathbb{P}(V \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)\mathbb{P}(X_2 \leq t) = t^2,$$

donc la densité de U est $2t\chi_{[0,1]}$. On a ainsi

$$\mathbb{E}(|X_1 - X_2|) = \mathbb{E}(V-U) = \mathbb{E}(V) - \mathbb{E}(U) = \int_0^1 2t^2 \mathrm{d}t - \int_0^1 2t(1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Exercice 4.

Soit (X_1, X_2) un couple de v.a. admettant la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right)$$

où $\rho \in [0, 1[$.

(a) Vérifier que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les densités marginales de X_1 et X_2. À quelle condition les v.a. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

(b) On pose $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ et $\Phi \in [0, 2\pi[$ définie par

$$\cos\Phi = \frac{X_1}{R} \text{ et } \sin\Phi = \frac{X_2}{R}.$$

Déterminer la densité du couple (R, Φ) puis celle de Φ.

Solution: (a) On vérifie que f est une densité:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right)\mathrm{d}x_2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On obtient du calcul si-dessus que les densités marginales de X_1 et X_2 sont

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Donc X_1 et X_2 sont indépendantes $\iff f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \iff \rho = 0$.

(b) Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ borélienne quelconque, puisque

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \varphi)}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,$$

on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F(R,\Phi)] &= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]} F(r,\varphi)f(x_1,x_2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ &= F(r,\varphi)\frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{r^2(1-\rho\sin 2\varphi)}{2(1-\rho^2)}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

Donc la densité de (R,Φ) est

$$\frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{r^2(1-\rho\sin 2\varphi)}{2(1-\rho^2)}\right)\chi_{\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]}.$$

Par intégration on obtient que la densité de Φ est

$$\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi(1-\rho\sin 2\varphi)}\chi_{[0,2\pi]}.$$

Exercice 5.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de loi μ et N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

(a) On suppose que μ est la loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$ et que N suit la loi de Poisson de paramètre λ. On pose

$$P=\sum_{i=1}^{N} X_i$$

et $F=N-P$, avec $P=F=0$ sur $\{N=0\}$.

i. Déterminer la loi du couple (P,N).

ii. En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

(b) On ne fait plus d'hypothèse sur les lois. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right)=\mathbb{E}(N)\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(\mathrm{d}x),$$

avec $\sum_{i=1}^{N} f(X_i)=0$ sur $\{N=0\}$.

Solution: (a)i. $\mathbb{P}(P=0,N=0)=\mathbb{P}(N=0)=e^{-\lambda}$. Pour $n\geq 1, 0\leq k\leq n$, on a

$$\mathbb{P}(P=k,N=n)=\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=k\right)=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\cdot\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}.$$

ii. Pour P, on a

$$\mathbb{P}(P=k)=\sum_{n\geq k}\mathbb{P}(P=k,N=n)=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

D'après i. on a

$$\mathbb{P}(P=k,F=l)=\mathbb{P}(P=k,N=k+l)=\frac{(\lambda p)^k(\lambda(1-p))^l e^{-\lambda}}{k!l!}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(F=l)=\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(P=k,F=l)=\frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}e^{-\lambda(1-p)}.$$

Ce qui donne

$$\mathbb{P}(P=k,F=l)=\mathbb{P}(P=k)\mathbb{P}(F=l),$$

donc P et F sont indépendantes.

(b) On calcule directement :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N}f(X_i)\right)&=\mathbb{E}\left(\sum_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}f(X_i)\chi_{\{N=n\}}\right)\\&=\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}f(X_i)\right)\mathbb{E}(\chi_{\{N=n\}})\\&=\sum_{n\geq 1}n\mathbb{E}(f(X_1))\mathbb{P}(N=n)=\mathbb{E}(N)\int_{\mathbb{R}}f(x)\mu(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

Exercice 6.

On appele variable gamma de paramètre $a>0$ une variable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ dont la loi admet la densité: $\dfrac{e^{-t}t^{a-1}}{\Gamma(a)}$.

(a) Soit Z_a une v.a. gamma de paramètre a. Calculer explicitement les moments entiers $\mathbb{E}(Z_a^n)$, en fonction de a et de $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soient Z_a et Z_b deux variables gamma indépendantes de paramètres a et b. Montrer que les variables $\dfrac{Z_a}{Z_a + Z_b}$ et $Z_a + Z_b$ sont indépendantes et expliciter la loi de $\dfrac{Z_a}{Z_a + Z_b}$.

Solution: (a) On calcule par définition :

$$\mathbb{E}(Z_a^n) = \int_0^\infty t^n \frac{e^{-t} t^{a-1}}{\Gamma(a)} \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)}.$$

(b) Par une calculation un peu lourde mais assez directe, on obtient que la densité de la v.a. $\left(\dfrac{Z_a}{Z_a + Z_b}, Z_a + Z_b\right)$ est

$$f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-y} y^{a+b-1} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \chi_{[0,1]\times\mathbb{R}_+}.$$

On observe donc que les v.a. $\dfrac{Z_a}{Z_a + Z_b}$ et $Z_a + Z_b$ sont indépendantes et que la densité de la v.a. $\dfrac{Z_a}{Z_a + Z_b}$ est

$$p(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \chi_{[0,1]}.$$

Remarque: Une v.a. avec densité $p(x)$ est dite une variable de Beta.

Exercice 7.

Soit h une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et g une fonction réelle sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x on ait $0 < g(x) < 1$. On engendre une suite $(Y_n, U_n), n = 1, 2, \cdots$ de couples indépendants de v.a. réelles, tels que pour tout $n \geq 1$, Y_n et U_n sont indépendantes. Les Y_n ont la même loi de densité h et les U_n suivent la loi uniforme sur $[0,\ 1]$. Soit τ le premier instant où $U_n \leq g(Y_n)$, c'est à dire: $\tau = \inf\{n \geq 1 : U_n \leq g(Y_n)\}$ en posant $\tau = +\infty$ au cas où $U_n > g(Y_n)$, pour tout n.

(a) Exprimer $\rho = \mathbb{P}(U_n \leq g(Y_n))$ à l'aide de h et de g. Quelle est la loi de τ en fonction de ρ? Montrer que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

(b) On prend $X = Y_\tau$, (i.e. $X = Y_n$ pour $\tau = n$). Quelle est la loi de X?

Solution: (a) Comme Y_n et U_n sont indépendantes, on a

$$\rho = \int_{\mathbb{R}\times[0,1]} \chi_{\{y\le g(x)\}} h(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

Pour tout $n \ge 1$, puisque les (Y_n, U_n) sont indépendants, on a $\mathbb{P}(\tau = n) = (1-\rho)^{n-1}\rho$. Donc, pour conclure que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, il suffit de montrer que $0 < \rho < 0$.

On a évidemment $0 \le \rho \le 1$, si $\rho = 0$, alors $g(x)h(x) = 0$ p.p. donc $h(x) = 0$ p.p. c'est impossible car h est une densité. Similairement on a $\rho \ne 1$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k\ge 1} f(Y_k)\chi_{\{\tau=k\}}\right) \\
&= \sum_{k\ge 1}(1-\rho)^{k-1}\mathbb{E}(f(Y_k)\chi_{\{U_k\le g(Y_k)\}}) \\
&= \frac{1}{\rho}\int_{\mathbb{R}\times[0,1]} f(x)\chi_{\{y\le g(x)\}}h(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\rho}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)h(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

donc la densité de X est

$$p(x) = \frac{g(x)h(x)}{\rho}.$$

Exercice 8.

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $k = 1, 2, \cdots, n$, $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

(a) Calculer la loi de $(S_1, \cdots, S_n)$.

(b) Montrer que S_n admet la densité de probabilité

$$f_n(t) = \lambda^n e^{-\lambda t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\chi_{(0,+\infty)}(t).$$

(c) Que vaut la fonction caractéristique de S_n?

(d) Calculer de deux manières $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.

Solution: (a) La densité de $(S_1, \cdots, S_n)$ est

$$f(s_1, \cdots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n} \chi_{\{0 \le s_1 \le \cdots \le s_n\}}.$$

(b) D'après (a) et par intégration.

(c) Comme les X_i sont indépendantes, on a

$$\Phi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n.$$

(d) Comme les X_i sont indépendantes et ont même loi, on a

$$\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_1) = \frac{n}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Remarque: On peut aussi utiliser l'égalité $\mathbb{E}(X^k) = (-i)^k \Phi^{(k)}(0)$, on a déjà vu ça le TD précédent.

TD10.1 Semaine 10, Mardi

Exercice 1.

Soient X et Y deux v.a. gaussiennes (centrées réduites) indépendantes. Montrer que les v.a. $\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$ soient indépendantes.

Solution: La densité du couple (X,Y) est $\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, posons

$$\begin{cases} u = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ v = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{u-v}{\sqrt{2}} \end{cases} ,$$

on a $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(u,v)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(u,v) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned}$$

donc la densité du couple $(U,V) = \left(\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}, \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)$ est $\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}$, donc U et V sont indépendantes.

Exercice 2.

Soient X et Y deux v.a. réelles borneés. Démontrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si:

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X^k Y^l) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^l).$$

Solution: $\Longrightarrow$: évident.

$\Longleftarrow$: On considère les fonction caractéristiques :

$$\begin{aligned}
\Phi_{(X,Y)}(s,t) &= \mathbb{E}(\exp(i(sX+tY))) \\
&= \mathbb{E}(\exp(isX)\exp(itY)) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(isX)^k}{k!}\right)\left(\sum_{l\geq 0}\frac{(isY)^l}{l!}\right)\right) \\
&= \sum_{k,l\geq 0}\frac{(i)^{k+l}s^k t^l}{k!l!}\mathbb{E}(X^k Y^l) \quad \text{(convergence garantie par bornitude)} \\
&= \sum_{k,l\geq 0}\frac{(i)^{k+l}s^k t^l}{k!l!}\mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^l) \\
&= \left(\sum_{k\geq 0}\frac{(is)^k}{k!}\mathbb{E}(X^k)\right)\left(\sum_{l\geq 0}\frac{(it)^l}{l!}\mathbb{E}(Y^l)\right) \\
&= \Phi_X(s)\Phi_Y(t)
\end{aligned}$$

donc X et Y sont indépendantes.

Exercice 3.

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Montrer que pour tout k,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq k} A_n\right) \leq \inf_{n\geq k}\mathbb{P}(A_n), \text{ et } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq k} A_n\right) \geq \sup_{n\geq k}\mathbb{P}(A_n).$$

(b) En déduire les deux inégalités suivantes:

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) \text{ et } \mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \limsup \mathbb{P}(A_n).$$

(c) Déterminer les quantités intervenant dans (b) lorsque

$$\Omega = \{-1, 1\}, \mathbb{P}(\{-1\}) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{3}{4}, A_n = \{(-1)^n\}.$$

Solution: (a)(b) Facile, on omet.

(c) On a

$$\mathbb{P}(A_n) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n \text{ impair} \\ \frac{3}{4}, & n \text{ pair} \end{cases}.$$

Donc

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{4} \text{ et } \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{3}{4}.$$

On obtient facilement que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \varnothing \text{ et } \limsup_{n\to\infty} A_n = \Omega,$$

donc

$$\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Exercice 4.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi. Montrer qu'on a les deux cas suivants:

Ou bien $\mathbb{E}(|X_1|) < 1$ et alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| \geq n\}) = 0,$$

ou bien $\mathbb{E}(|X_1|) = 1$ et alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| \geq n\}) = 1.$$

Solution: Posons $A_n := \{|X_n| \geq n\}$.

Si on a

$$\infty > \mathbb{E}(|X_1|) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_1| \geq n) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n),$$

alors par lemme de Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Si on a

$$\infty = \mathbb{E}(|X_1|) = \sum \mathbb{P}(A_n),$$

comme les A_n sont indépendants, on obtient du lemme de Borel-Cantelli que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. réelles positives, indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Montrer que p.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty,$$

sauf dans un cas à préciser.

(b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante:

$$\mathbb{E}(X) < \infty \iff \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) < \infty.$$

Indication : On pourra montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \leq X \leq \alpha(n+1)) \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \leq X \leq \alpha(n+1)).$$

En déduire la dichotomie suivante: p.s.

$$\limsup \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}(X_1) < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}(X_1) = \infty. \end{cases}$$

Solution: (a) Si $X_n = 0$ p.s. on a clairement

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n = 0 \text{ p.s.}$$

Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $\mathbb{P}(X_n > \varepsilon) > 0$, donc

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \infty.$$

Puisque les X_n sont indépendantes, on obtient du lemme de Borel-Cantelli que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} \{X_n > \varepsilon\}) = 1.$$

Ce qui nous donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty \text{ p.s.}$$

(b) En observant que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} X \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{n \geq 0} \int_{\alpha n}^{\alpha(n+1)} X \mathrm{d}\mathbb{P}$$

on obtient que

$$\sum_{n \geq 0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \leq X \leq \alpha(n+1)) \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{n \geq 0} \alpha(n+1) \mathbb{P}(\alpha n \leq X \leq \alpha(n+1))$$

qui implique que

$$\alpha \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) \leq \mathbb{E}(X) \leq \alpha \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq \alpha n),$$

donc on a

$$\mathbb{E}(X) < \infty \iff \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X \geq \alpha n) < \infty.$$

D'après lemme de Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}(\limsup\{X_n \geq \alpha n\}) = \begin{cases} 0, & \mathbb{E}(X_1) < \infty \\ 1, & \mathbb{E}(X_1) = \infty \end{cases},$$

comme $\alpha > 0$ est arbitraire, on obtient que

$$\limsup \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}(X_1) < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}(X_1) = \infty. \end{cases}$$

Exercice 6.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

(a) Montrer qu'il y a presque sûrement une infinité de n tels que $X_n = 1$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'événement $A_n = \{X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{2n-1} = 1\}$. Montrer que p.s. il n'y a qu'un nombre fini de A_n qui sont réalisés.

(c) Montrer qu'il en est de même pour l'événement:

$$B_n = \{\text{parmi } X_{n^2}, X_{n^2+1}, \cdots, X_{(n+1)^2} \text{ il y a } n \text{ v.a. consécutives qui valent 1.}\}$$

Solution: (a) Le but n'est que de montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$, c'est trivial par lemme de Borel-Cantelli car les A_n sont indépendants et

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\geq 1} p = \infty.$$

(b) On voit facilement que $\mathbb{P}(A_n) = p^n$, donc

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \frac{p}{1-p} < \infty,$$

par lemme de Borel-Cantelli on a $\mathbb{P}(\limsup A_n = 0)$, c'est exactement ce qu'on veut.

(c) On voit facilement que $\mathbb{P}(B_n) \leq (n+1)p^n$ donc $\sum\limits_{n\geq 1} \mathbb{P}(B_n) < \infty$, le résultat est vrai par lemme de Borel-Cantelli.

TD10.2 Semaine 10, Jeudi

Exercice 1.

Soit $(X_i, 1 \leq i \leq n)$ n variables indépendantes, telles que pour tout i, X_i suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i)$. Montrer que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

suit une loi gaussienne dont on donnera les paramètres en fonction de $(m_i, \sigma_i, 1 \leq i \leq n)$.

Indication : On pourra s'aider des fonctions caractéristiques.

Solution: Comme les X_k sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned}\Phi_{S_n}(t) &= \prod_{k=1}^{n} \Phi_{X_k}(t) \\ &= \exp\left(it \sum_{k=1}^{n} m_k - \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \right),\end{aligned}$$

donc on obtient que

$$S_n \sim \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \right).$$

Exercice 2.

Donner la loi de la somme de 2 variables indépendantes X et Y telles que X et Y suivent des lois exponentielles.

Solution: Supposons que les densités de X et Y sont

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\chi_{\mathbb{R}_+}, \quad f_Y(y) = \mu e^{-\mu y}\chi_{\mathbb{R}_+}.$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a pour la densité de $X+Y$:

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(t) &= \int_0^t f_X(x) f_Y(t-x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda\mu e^{-\mu t}\int_0^t e^{(\mu-\lambda)x}\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

si $\lambda = \mu$, alors la densité de $X+Y$ est

$$f_{X+Y}(t) = \lambda\mu e^{-\mu t} t\chi_{\mathbb{R}_+};$$

si $\lambda \neq \mu$, alors la densité de $X+Y$ est

$$f_{X+Y}(t) = \lambda\mu e^{-\mu t}\frac{e^{(\mu-\lambda)t}-1}{\mu-\lambda}\chi_{\mathbb{R}_+}.$$

Exercice 3.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une famille de variables i.i.d. telles que pour tout i, X_i suit une loi exponentielle. Donner la loi de $\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ et $\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.

Solution: Supposons que $(X_i)_{i\geq 1}$ sont des variables i.i.d. de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On donne les lois par les fonctions de répartition :

si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq x\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) \\ &= (1-e^{-\lambda x})^n, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}F_{\min}(x) &= 1 - \mathbb{P}\left(\min_{1\leq i\leq n} X_i > x\right)\\ &= 1 - e^{-\lambda x},\end{aligned}$$

et si $x \leq 0$, on a $F_{\max}(x) = F_{\min}(x) = 0$.

Exercice 4.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = X_n X_{n+1}$ et

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

Montrer que

$$\frac{V_n}{n} \overset{(P)}{\to} p^2.$$

Solution: On a déjà vu (TD9.2 Exercice 1) que $\mathbb{E}(V_n) = np^2$ et que

$$\mathrm{Var}(V_n) = p^2(1-p)(n + 3pn - 2p).$$

Donc on obtient que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{V_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Var}\frac{V_n}{n}\\ &= \frac{p^2(1-p)(n+3pn-2p)}{n^2\varepsilon^2}\\ &\to 0.\end{aligned}$$

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{[0,\alpha]}(X_k)$$

et $Z_n = S_n - n\alpha, n \geq 1$, pour $\alpha \in [0,1]$.

(a) Montrer en utilisant l'identité de Markov que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|Z_n| > n\varepsilon) \leq \frac{\text{Constante}}{n^2}.$$

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_{[0,\alpha]}(X_k) = \alpha, \text{ p.s.}$$

Solution: (a) Supposons que $Y_k = \chi_{[0,\alpha]}(X_k)$, alors $\mathbb{E}(Y_k) = 0$ et

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

On a

$$\mathbb{P}(|Z_n| > n\varepsilon) \leq \frac{1}{n^4\varepsilon^4}\mathbb{E}(Z_n^4).$$

Puisque

$$\mathbb{E}(Z_n^4) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k^4) + 3\sum_{i\neq j} \mathbb{E}(Y_i^2)\mathbb{E}(Y_j^2),$$

on obtient que

$$P(|Z_n| > n\varepsilon) \leq \frac{\text{Constante}}{n^2}.$$

(b) Par (a) on observe que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \infty.$$

Donc, on déduit du lemme de Borel-Cantelli que

$$\mathbb{P}\left(\limsup \left|\frac{Z_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

comme ε est arbitraire, on a $Z_n \to 0$ p.s. C'est exactement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_{[0,\alpha]}(X_k) = \alpha, \text{ p.s.}$$

Exercice 6.

Soit $\alpha > 0$, et soit, sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = n^{-\alpha} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - n^{-\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$ mais que, p.s.

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Solution: Puisque

$$\mathbb{E}(|Z_n|) = \frac{1}{n^\alpha} \to 0,$$

on obtient que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$. Soit $A_n := \{Z_n = 1\}$, les A_n sont indépendantes.

Si $\alpha > 1$, alors on a

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

donc par lemme de Borel-Cantelli, on a $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Dans ce cas, on a

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = 0 \text{ p.s.}$$

Si $\alpha > 1$, alors on a

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty,$$

donc par lemme de Borel-Cantelli, on a $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$. Dans ce cas, on a

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = 1 \text{ p.s.}$$

Exercice 7.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$

On note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, n \geq 1$$

et $S_0 = 0$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

(b) Étudier

$$\sum_n \mathbb{P}(S_n = 0).$$

Que peut-on en conclure?

Solution: (a) Si n est impair, alors $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$. Si n est pair et $n = 2m$, alors

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \binom{2m}{m} p^m (1-p)^m.$$

(b) En utilisant la formule de Stirling, on obtient facilement que

$$\binom{2m}{m} \sim \frac{4^m}{\sqrt{m\pi}},$$

donc

$$\sum_n \mathbb{P}(S_n = 0) < \infty \iff p \neq \frac{1}{2}.$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$, on implique le lemme de Borel-Cantelli et on obtient que p.s. $\{S_n = 0\}$ pour un nombre fini de n.

Si $p = \frac{1}{2}$, on ne peut pas impliquer le lemme de Borel-Cantelli car les S_n ne sont pas indépendantes, on ne sais pas que peut-on en conclure encore.

TD11.1 Semaine 11, Mardi

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} = 1 \text{ p.s.}$$

Solution: Par lemme de Borel-Cantelli, pour tout $1 > \varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\ln(n)} > 1+\varepsilon\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < +\infty,$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{X_n}{\ln(n)} > 1+\varepsilon\right) = 0.$$

On a aussi

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\ln(n)} > 1-\varepsilon\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1-\varepsilon}} = +\infty.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{X_n}{\ln(n)} > 1-\varepsilon\right) = 1.$$

Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} = 1 \text{ p.s.}$$

Exercice 2.

Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $X_n \xrightarrow{P} X$. Montrer que $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

Solution: Puisque g est continue, on peut montrer que pour tout $M > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|x| \leq M, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \eta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et prenons $M > 0$ t.q.

$$\mathbb{P}(|X| > M) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, si $X_n \xrightarrow{P} X$, on prend N t.q.

$$n > N \implies \mathbb{P}(|X_n - X| > \eta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour tout $n > N$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|X| > M) + \mathbb{P}(|X| \leq M, |X_n - X| > \eta) \\
&\leq \mathbb{P}(|X| > M) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \eta) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

donc $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

Exercice 3.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}, X$ des v.a. Montrer que

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff \int_\Omega \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \mathrm{d}\mathbb{P} \to 0.$$

Solution: Si $X_n \xrightarrow{P} X$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \mathrm{d}\mathbb{P} &\leq \varepsilon \mathbb{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon) + 1 \cdot \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \\
&\leq \varepsilon + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)
\end{aligned}$$

donc

$$\limsup \int_\Omega \frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$$

donc

$$\int_\Omega \frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \mathrm{d}\mathbb{P} \to 0.$$

Inversement, si

$$\int_\Omega \frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \mathrm{d}\mathbb{P} \to 0,$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$, par l'inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int_\Omega \frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

donc $X_n \xrightarrow{P} X$.

Exercice 4.

Établir que pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = f\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(p), p \in [0,1].$$

Établir que pour toute fonction réelle continue et bornée f définie sur $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda), \lambda \in]0,+\infty[.$$

Solution: Posons une suite de i.i.d. $(X_n)_{n\geq 1}$ de la loi uniforme sur $[0,1]$, par la loi des grands nombres, on a

$$\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} \to \frac{1}{2} \text{ p.s.}$$

Puisque f est continue, on a

$$f\left(\frac{X_1+\cdots X_n}{n}\right) \to f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ p.s.}$$

Donc on obtient par TCD que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Posons une suite de i.i.d. $(Y_n)_{n\geq 1}$ de loi de Bernoulli de paramètre p, alors on a

$$Y_1 + \cdots Y_n \sim \mathcal{B}(n,p)$$

de plus par la loi des grands nombres, on a

$$\frac{Y_1+\cdots Y_n}{n} \to p \text{ p.s.}$$

Puisque f est continue, on a

$$f\left(\frac{Y_1+\cdots Y_n}{n}\right) \to f(p) \text{ p.s.}$$

Donc on obtient par TCD que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(p), p \in [0,1].$$

Posons une suite de i.i.d. $(Z_n)_{n\geq 1}$ de loi de Poisson de paramètre λ, par la loi des grands nombres, on a

$$\frac{Z_1+\cdots Z_n}{n} \to \lambda \text{ p.s.}$$

De plus, $Z_1 + \cdots + Z_n$ suive loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

Puisque f est continue et bornée, on a

$$f\left(\frac{Z_1+\cdots Z_n}{n}\right) \to f(\lambda) \text{ p.s.}$$

Donc on obtient par TCD que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda), \lambda \in]0,+\infty[.$$

Exercice 5.(Théorème d'approximation de Weierstrass)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, et soit S_n une v.a. de loi binômial de paramètres n et x. En utilisant la formule

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z\chi_A) + \mathbb{E}(Z\chi_{A^c})$$

avec

$$Z = f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right), A = \{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\},$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} \right| = 0.$$

Solution: Comme f est une fonction continue définie sur un intervalle compact, elle est automatiquement bornée et uniformément continue. On prend $M := ||f||$ et $\delta > 0$ t.q.

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Alors, on a

$$\mathbb{E}(Z\chi_A) < \varepsilon, \mathbb{E}(Z\chi_{A^c}) \leq 2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right).$$

Par définition, on a

$$\mathbb{E}(Z) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k},$$

comme

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\delta^2} = \frac{1}{4n\delta^2},$$

on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} \right| = 0.$$

Remarque: On a prouvé dans cet exercice le théorème d'approximation de Weierstrass, qui dit que toute fonction continue sur $[0,1]$ est approché uniformément par polynômes.

Exercice 6.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que pour tout $n \geq 1, \mathbb{E}(X_n^2) < 1$. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = m$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) = 0.$$

(a) On pose

$$m_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k).$$

Montrer que la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m_n\right)$$

converge en probabilité vers 0.

(b) En déduire que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

converge en probabilité vers m.

Solution: (a) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m_n\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\\ &= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)\\ &\to 0.\end{aligned}$$

(b) Posons

$$Z_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N t.q.

$$n > N \implies |m_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour tout $n > N$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Z_n - m| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|Z_n - m_n + m_n - m| > \varepsilon)\\ &\leq \mathbb{P}(|Z_n - m_n| + |m_n - m| > \varepsilon)\\ &\leq \mathbb{P}\left(|z_n - m_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &\to 0.\end{aligned}$$

Exercice 7.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

(a) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{E}(\exp(\lambda S_n)) = (1 - p + p\exp\lambda)^n$.

(b) Soient $\lambda, \varepsilon > 0$ tels que $p + \varepsilon < 1$. En appliquant l'inégalité de Markov à la v.a.

$$\exp\left(\lambda\frac{S_n}{n}\right),$$

vérifier que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) \leq \exp(n\ln(1 - p + pe^{\frac{\lambda}{n}}) - \lambda(p+\varepsilon)).$$

En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p\varepsilon\right) \leq \exp(-nH(p+\varepsilon)),$$

où pour tout $x \in]0,1[$,

$$H(x) = x\ln\left(\frac{x}{p}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right).$$

(c) Montrer que sur $[0, 1-p[, x \mapsto H(x+p)$ est convexe, puis que pour tout $x \in [0, 1-p), H(p+x) \geq 2x^2$. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) \leq \exp(-2n\varepsilon^2).$$

(d) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \leq -\varepsilon\right) \leq \exp(-2n\varepsilon^2),$$

puis que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp(-2n\varepsilon^2).$$

(e) En déduire la loi des grandes nombres pour des v.a. de Bernoulli indépendantes.

Solution: (a) On a d'abord $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(\lambda S_n)) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{\lambda k} \\ &= (1-p+pe^{\lambda})^n.\end{aligned}$$

(b) Par l'inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\lambda S_n}{n}\right) \geq \exp(\lambda(p+\varepsilon))\right) \\ &\leq e^{-\lambda(p+\varepsilon)}\mathbb{E}(\exp\left(\frac{\lambda S_n}{n}\right) \\ &= (1-p+p^{\frac{\lambda}{n}})^n \cdot e^{-\lambda(p+\varepsilon)} \\ &= \exp(n\ln(1-p+pe^{\frac{\lambda}{n}}) - \lambda(p+\varepsilon)).\end{aligned}$$

En prenant

$$\lambda = n \ln \frac{(1-p)(p+\varepsilon)}{p(1-p-\varepsilon)},$$

on obtient que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p\varepsilon\right) \leq \exp(-nH(p+\varepsilon)).$$

Remarque: Pourquoi cette valeur pour λ ?

Réponse: on veut trouver la valeur minime pour l'expression

$$f(\lambda) := n\ln(1-p+pe^{\frac{\lambda}{n}}) - \lambda(p+\varepsilon),$$

l'annulation de la fonction dérivée $f'(\lambda) = 0$ donne

$$\frac{pe^{\frac{\lambda}{n}}}{1-p+pe^{\frac{\lambda}{n}}} = p + \varepsilon$$

qui est équivalent à

$$p(1-p-\varepsilon)e^{\frac{\lambda}{n}} = (p+\varepsilon)(1-p),$$

et donc équivalent à

$$\lambda = n \ln \frac{(1-p)(p+\varepsilon)}{p(1-p-\varepsilon)}.$$

(c) Par des calculs concrets, on a $H(p) = 0, H'(p) = 0$ et

$$H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq 4.$$

Donc H est convexe et pour tout $x \in [0, 1-p), H'(p+x) \geq 4x$ et donc $H(p+x) \geq 2x^2$, ainsi on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) \leq \exp(-2n\varepsilon^2).$$

(d) Posons $\tilde{X}_i = 1 - X_i$ qui suive la loi de Bernoulli de paramètre $1-p$ et $\tilde{S}_n = n - S_n$ les sommes partielles. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - p \leq -\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\tilde{S}_n}{n} - (1-p) \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \exp(-2n\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp(-2n\varepsilon^2).$$

(e) Posons A_n les événements

$$A_n := \left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\},$$

on a alors

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{n\geq 0} \exp(-2n\varepsilon^2) < \infty,$$

donc par lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\limsup \left| \frac{S_n}{n} - p \right| = 0 \text{ p.s.}$$

d'où le résultat.

TD11.2 Semaine 11, Jeudi

Exercice 1.

Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. t.q. X_n suive une loi exponentielle de paramètre λ_n. On suppose que $\lambda_n \to 0$. Soit $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$. Montrer que Z_n converge en loi et préciser sa limite.

Solution: On calcule les fonctions de répartition pour tout $x \in [0,1[$

$$\begin{aligned}
F_n(x) :&= \mathbb{P}(Z_n \leq x) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(Z_n \leq x, \lfloor X_n \rfloor = k) \\
&= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X_n \in [k, k+x]) \\
&= \sum_{k\geq 0} \lambda_n \int_k^{k+x} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda_n k}(1 - e^{-\lambda_n x}) \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda_n x}}{1 - e^{-\lambda_n}}.
\end{aligned}$$

Comme $\lambda_n \to 0$, on a $F_n(x) \to x$, donc Z_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[0,1]$.

Remarque: Rappelons qu'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. converge en loi vers X si et seulement si la suite de leurs fonctions de répartition F_n converge vers la fonction de répartition F de X en tout point où F est continue.

Exercice 2.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs entières t.q. X_n suive la loi

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}, k \geq 1, \alpha > 0.$$

Montrer que $\frac{X_n}{n}$ converge en loi et préciser sa limite.

Solution: Encore, considérons les fonctions de répartition

$$\begin{aligned} F_n(x) :&= \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}(X_n \leq nx) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{k-1} \\ &= 1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} \\ &\to e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

donc $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers la loi exponentielle de paramètre α.

Exercice 3.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendeqntes t.q.

$$X_n \sim \frac{1}{n}\delta_1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\delta_0.$$

Commemt sont les convergences de la suite ?

Solution: On vérifier facilement que pour tout $p \in [1, \infty[$, $X_n \overset{\mathbb{L}^p}{\to} \delta_0$, donc $X_n \overset{P}{\to} \delta_0$ et $X_n \overset{loi}{\to} \delta_0$. Mais X_n ne converge pas p.s. vers δ_0. En effet, par lemme de Borel-Cantelli, on peut montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = 1 \text{ p.s.}$$

Remarque: Un résumé:

$$\begin{tikzcd}
X_n \overset{p.s.}{\to} X \arrow[dr] & & \\
& X_n \overset{P}{\to} X \arrow[r] & X_n \overset{loi}{\to} X \\
X_n \overset{\mathbb{L}^p}{\to} X \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Exercice 4.

On définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos 2n\pi x, & x \in]0,1[\\ 0, & x \notin]0,1[. \end{cases}$$

Soit X_n une v.a. de densité f_n, montrer que la suite (X_n) converge en loi bien que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas.

Solution: On voit facilement que f_n ne converge pas. Mais si on calcule les fonctions de répartition, on a pour tout $x \in [0,1[$

$$\begin{aligned} F_n(x) :&= \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t \\ &= x - \int_0^x \cos(2n\pi t)\mathrm{d}t \\ &= x - \frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi x). \end{aligned}$$

Donc on obtient que

$$F_n(x) \to F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases},$$

donc X_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 5.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ 2 suites de v.a.

(a) On suppose que X_n converge en loi vers X et Y_n converge en probabilité vers 0. Motrer que $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers X.

(b) Donner un exemple : $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ convergent en loi mais $(X_n + Y_n)$ ne converge pas en loi.

Solution: (a) Soit $\varepsilon > 0$. D'abord, il existe N t.q.

$$n > N \implies |Y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ p.s.}$$

Alos, pour tout $n > N$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n + Y_n - X| > \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(|X_n + Y_n - X| > \varepsilon, |Y_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| + |Y_n| > \varepsilon, |Y_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

(b) On prend

$$X_n = \frac{\delta_0 + \delta_1}{2}$$

et on pose

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & n \text{ pair} \\ -X_n, & n \text{ impair} \end{cases}.$$

Exercice 6.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de fonction caractésitique ψ satisfant $\phi'(0) = i\mu$. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu.$$

Solution: Posons

$$Z_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

et calculons les fonctions caractéristiques:

$$\begin{aligned}\phi_n(t) : &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{it}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{it}{n}X_k\right)\right)\\ &= \phi\left(\frac{t}{n}\right)^n\\ &\to e^{i\mu t}.\end{aligned}$$

On a alors $Z_n \to \mu$ en loi, comme μ est constant, cette convergence est aussi en probabilité.

Remarque: 1. $X_n \to X$ en loi si et seulement si $\phi_{X_n} \to \phi_X$ en tout point.

2. La convergence en loi vers une constante est équivalent à la convergence en probabilité vers cette constante.

Exercice 7.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(N_k)_{k\geq 1}$ 2 suites de v.a. t.q. les N_k sont à valeurs entières strictement positives et $N_k \overset{P}{\to} \infty$. Montrer que

(a) Si $X_n \overset{loi}{\to} X$ et X_n sont indépendeqntes avec N_k, alors $X_{N_k} \overset{loi}{\to} X$.

(b) Si $X_n \overset{p.s.}{\to} X$ alors $X_{N_k} \overset{P}{\to} X$.

Solution: (a) Soit ϕ_n, ϕ et Φ_k les fonctions caractéristiques de X_n, X et X_{N_k}, alors

$$\Phi_k(t) = \sum_{j\geq 1}\phi_j(t)\mathbb{P}(N_k = j).$$

On a alors

$$|\Phi_k(t) - \phi(t)| \leq \sum_{j\geq 1}|\phi_j(t) - \phi(t)|\mathbb{P}(N_k = j).$$

Fixons t, il suffit de montrer que

$$\sum_{j\geq 1} |\phi_j(t) - \phi(t)|\mathbb{P}(N_k = j) \to 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $X_j \to X$ en loi, il existe J t.q. $j > J \implies |\phi_j(t) - \phi(t)| < \varepsilon$. De plus, comme $N_k \xrightarrow{P} \infty$, il existe K t.q. $k > K \implies \mathbb{P}(N_k \leq J) < \varepsilon$. Alos pour tout $k > K$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 1} |\phi_j(t) - \phi(t)|\mathbb{P}(N_k = j) &= \left(\sum_{j=1}^{J} + \sum_{j\geq J}\right) |\phi_j(t) - \phi(t)|\mathbb{P}(N_k = j) \\
&\leq \varepsilon\mathbb{P}(N_k > J) + 2\mathbb{P}(N_k \leq J) \\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

(b) On a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_{N_k} - X| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|X_{N_k} - X| > \varepsilon, N_k > n) + \mathbb{P}(|X_{N_k} - X| > \varepsilon, N_k \leq n) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j>n} |X_j - X| > \varepsilon\right) + \mathbb{P}(N_k < n),
\end{aligned}$$

donc

$$\limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}(|X_{N_k} - X| > \varepsilon) \leq \limsup_{j\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_j - X| > \varepsilon\right) + \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(N_k < n) = 0,$$

d'où le résultat.

Exercice 8.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ i.i.d. de fonction caractésitique ψ et on définit (Y_n):

$$Y_0 = \frac{X_0}{2}, Y_1 = \frac{X_1 + Y_0}{2}, \cdots, Y_n = \frac{X_n + Y_{n-1}}{2}, \cdots$$

(a) Calculer la fonction caractésitique ϕ_n de Y_n en fonction de ϕ et de n.

(b) On suppose que la loi commune des X_n est la loi normale centrée $\mathcal{N}(0, \sigma)$. Quelle est la loi de Y_n ? Quelle est la loi limite de Y_n ?

(c) Si X_n suivent la loi de Cauchy de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$, montrer que Y_n converge en loi et préciser la limite.

Solution: (a) On peut vérifier par récurrence que

$$\phi_n(t) = \prod_{k=1}^{n+1} \phi\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right).$$

(b) Si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma)$, alors,

$$\phi(t) = \exp\left(-\frac{\sigma}{2}t^2\right).$$

Donc, d'après (a)

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) &= \exp\left(-\frac{\sigma}{2}t^2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{4^k}\right)\\
&= \exp\left(-\frac{\sigma}{6}t^2\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)\right)\\
&\to \exp\left(-\frac{\sigma}{6}t^2\right),
\end{aligned}$$

donc Y_n converge en loi vers $\mathcal{N}\left(0,\frac{\sigma}{3}\right)$.

(c) On admit que $\phi(t) = e^{-|t|}$, alors

$$\begin{aligned}
\phi_n(t) &= \exp\left(-|t|\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}\right)\\
&= \exp\left(-|t|\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\\
&\to e^{-|t|},
\end{aligned}$$

donc Y_n converge la même loi de Cauchy que X_0.

Remarque: Si on veut montrer que $\phi(t) = e^{-|t|}$, on a besoin de la connaisance sur l'analyse complexe, on va l'apprendre l'année prochaine. Vous pouvez trouver le polycopié du cours d'analyse complexe de Prof.J.Merker sur le site

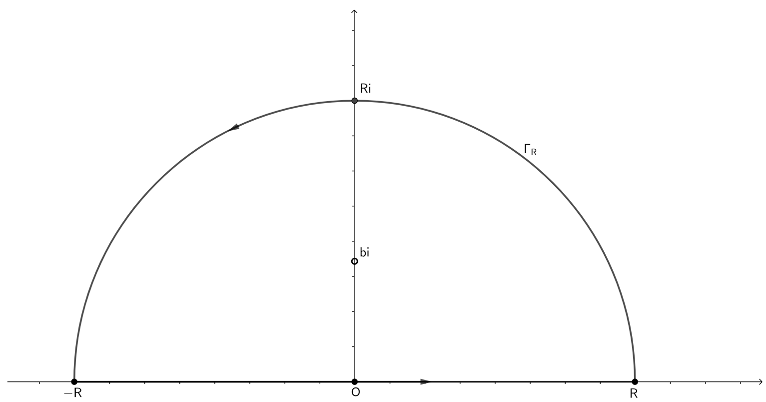
http://www.imo.universite-paris-saclay.fr/∼joel.merker/

Dans cette remarque on montre une formule plus générale:

Théorème Soient $a > 0, b > 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{b} e^{-ab}.$$

Démonstration: En appliquant le théorème des résidus pour le contour dans la figure suivante



on obtient qu'il suffit de montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} \mathrm{d}z \to 0.$$

Posons $z = Re^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$, on a $\mathrm{d}z = iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta$, donc

$$\int_{\Gamma_R} \left| \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} \right| \mathrm{d}z \leq \frac{R}{R^2 - b^2} \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} \mathrm{d}\theta \to 0.$$

TD12.1 Semaine 12, Mardi

Exercice 1.

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $X_n = \max(U_1, \cdots, U_n)$. Montrer que $X_n \xrightarrow{P} 1$.

Solution: Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|x_n - 1| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n < 1-\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n > 1+\varepsilon) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i < 1-\varepsilon) + 0 \\
&= (1-\varepsilon)^n \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$? Que vaut $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n)$?

(b) Utiliser le théorème central limite pour montrer que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Solution: (a) En calculant les fonctions caractéristique, on obtient que $X_1 + \cdots + X_n$

suive la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$. Donc

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda n}.$$

(b) Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, comme $\mathbb{E}(X_1) = \lambda, \mathrm{Var}(X_1) = \lambda$, par théorème central limite on a

$$\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1)$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq 0\right) \to \frac{1}{2}.$$

Mais, si on prend $\lambda = 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq 0\right) &= \mathbb{P}(S_n \leq n\lambda) \\ &= e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 3.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de la loi uniforme sur $[0,1]$.

(a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_{2n+1} - X_{2n}$. Montrer que la suite

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + \cdots + Y_n)$$

converge en loi et trouver la loi limite.

(b) On définit $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}$. La suite (Z_n) converge-t-elle ? En quel sens ? Quelle est la limite ?

On pose maintenant

$$T_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & X_n \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & X_n > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

(c) Montrer que (T_n) converge en probabilité et trouver sa limite.

(d) Vérifier que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|T_{n^2} - 1| > \varepsilon) < \infty, \forall \varepsilon > 0.$$

En déduire la convergence presque sure de la suite (T_{n^2}).

Solution: (a) D'abord Y_n sont des i.i.d. avec $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_{2n+1}) - \mathbb{E}(X_{2n}) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n^2) &= \mathbb{E}(X_{2n+1}^2 + X_{2n}^2 - 2X_{2n+1}X_{2n}) \\
&= 2\mathbb{E}(X_1^2) - 2(\mathbb{E}(X_n))^2 \\
&= 2\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x - 2\left(\int_0^1 x \mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Par théorème central limite, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n) \overset{loi}{\to} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{6}\right).$$

(b) On a d'abord

$$\ln Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln X_k,$$

on veut étudier la comportement de $\ln Z_n$, pour ça, on calcule:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\ln X_1) &= \int_0^1 \ln x \mathrm{d}x \\
&= (x\ln x - x)|_0^1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Donc par la loi forte des grands nombres, $\ln Z_n \overset{p.s.}{\to} -1$, donc

$$Z_n \overset{p.s.}{\to} \frac{1}{e}.$$

(c) On vérifie facilement que

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(T_n = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \\ \mathbb{P}(T_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

donc pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|T_n - 1| > \varepsilon) = \frac{1}{n} \to 0.$$

Donc $T_n \overset{P}{\to} 1$.

(d) On a

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|T_{n^2} - 1| > \varepsilon) &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(T_{n^2} = \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \\ &< \infty \end{aligned}$$

par lemme de Borel-Cantelli, $T_{n^2} \overset{p.s.}{\to} 1$.

Exercice 4.(Lois stables)

On dit qu'une v.a. X suit une loi stable s'il existe des constantes $a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ t.q. pour toutes i.i.d. $X_1, \cdots, X_n$ de même loi que X, on a $X_1 + \cdots + X_n \sim a_n X + B_n$.

(a) Montrer que les lois gassiennes centrées et les lois de Cauchy sont stables.

(b) Calculer a_n et b_n lorsque X suit une loi stable de variance finie σ^2, en déduire que les seules lois stables de variance finie sont les loi gaussiennes.

Solution: (a) Si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, on montre en calculant la fonction caractéristique que $X_1 + \cdots + X_n \sim \sqrt{n}X$.

Si Y suit la loi de Cauchy de paramètre $c > 0$, alors on montre en calculant la fonction caractéristique que $Y_1 + \cdots + Y_n \sim nY$.

(b) On a

$$\begin{cases} n\mathbb{E}(X) = a_n\mathbb{E}(X) + b_n \\ n\sigma^2 = a_n^2\sigma^2 \end{cases}$$

donc $a_n = \sqrt{n}, b_n = (n-\sqrt{n})\mathbb{E}(X)$. On applique le théorème central limite et on obtient que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}(X)) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Mais on a aussi

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}(X)) \sim X - \mathbb{E}(X),$$

donc $X \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(X), \sigma^2)$.

Exercice 5.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. centrées de variance σ^2, de fonction caractérisitique Φ. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On définit aussi la suite $(N_k)_{k\geq 1}$ de v.a. indépendeqntes et indépendeqntes de (X_n) t.q. N_k suit la loi de Poisson de paramètre k. Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$Z_k = \begin{cases} \dfrac{S_{N_k}}{\sqrt{N_k}}, & N_k \neq 0, \\ X_1, & N_k = 0. \end{cases}$$

(a) Exprimer la fonction caractésitique Φ_k de Z_k en fonction de Φ. Qu'advient-il si X_1 est une gaussienne ?

(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \to \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

En déduire que (Z_k) converge en loi vers une v.a. que l'on précisera.

Solution: (a) On a

$$\Phi_k(t) = e^{-k}\left(\Phi(t) + \sum_{m\geq 1}\frac{k^m}{m!}\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)^m\right).$$

Si $X_1 \sim \mathcal{N}(), \sigma^2)$ alors

$$\Phi(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

et donc

$$\Phi_k(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

(b) Puisque

$$\Phi(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2),$$

on obtient que

$$\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \to \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Puis on vérifie directement que

$$\Phi_k(t) \to \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right),$$

donc $Z_k \stackrel{loi}{\to} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

TD12.2 Semaine 12, Jeudi

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des v.a. de fonction de répartition F_n.

(a) On suppose que

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1.$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle? En quels sens? Vers quelle limite? $(F_n(x))_{n\geq 1}$ converge-t-elle pour tout $x \in \mathbb{R}$?

(b) On suppose que $\mathbb{P}(X_n = n) = 1$. (F_n) tend-elle vers une fonction de répartition?

Solution: (a) Posons

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \\ 1 & x \geq 0 \end{cases},$$

alors F_n converge vers F sauf en $x = 0$. De plus, on vérifie aussi que $X_n \to 0$ p.s.; dans $\mathbb{L}^p$ et donc en probabilité et en loi.

(b) Non, dans ce-cas là, F_n converge vers 0 mais ce n'est pas une fonction de répartition.

Exercice 2.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de fonction caractéristique Φ. On suppose que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Posons $Y_n = (-1)^n X_n$.

(a) Quelle est la fonction caractéristique de Y_n? Quelle condition faut-il imposer à la loi de X_n pour que (Y_n) converge en loi?

(b) Quelle condition faut-il imposer à la loi de X_n pour que (Y_n) converge en probabilité?

(c) On pose

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_{2k}, T_n := \sum_{k=1}^{n} X_{2k+1}$$

et

$$V_n := \frac{S_n}{T_n},$$

on remarque que $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$. Que pouvez-vous dire du comportement asymptotique de (V_n)? (On traitera en premier lieu le cas $\mathbb{E}(X_1) \neq 0$.)

Solution: (a) $\Phi_{Y_n}(t) = \Phi((-1)^n t)$. Donc (Y_n) converge en loi s.s.i. $\Phi(-t) = \Phi(t)$ s.s.i. la loi de X_n est symmétrique.

(b) Si (Y_n) converge en probabilité, on a alors $\mathbb{P}(|Y_{n+1} - Y_n| > \varepsilon) \to 0, \forall \varepsilon > 0$, donc $\mathbb{P}(|X_n + X_{n+1}| > \varepsilon) \to 0, \forall \varepsilon > 0$. Donc $\mathbb{P}(|X_n + X_{n+1}| > \varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0$, i.e. $X_n + X_{n+1} = 0$ p.s. Comme X_n sont des i.i.d., on conclut que $X_n = 0$ p.s.

(c) Si $\mathbb{E}(X_1) \neq 0$, alors par la loi des grands nombres on a

$$\frac{S_n}{n} \overset{p.s.}{\to} \mathbb{E}(X_1), \frac{T_n}{n} \overset{p.s.}{\to} \mathbb{E}(X_1),$$

donc $V_n \overset{p.s.}{\to} 1$.

Si $\mathbb{E}(X_1) = 0$, notons $\sigma^2 := \mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Par le théorème central limite, on a alors

$$\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{loi}{\to} \mathcal{N}(0,1), \frac{T_n}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{loi}{\to} \mathcal{N}(0,1).$$

On traitera d'abord le cas $\sigma^2 \neq 0$, dans ce cas,

$$V_n \overset{loi}{\to} \frac{S}{T}$$

où S, T sont des i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Si $\sigma^2 = 0$, on a alors $X_1 = 0$ p.s. C'est un cas ennuyant.

Exercice 3.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, X_n étant de fonction de répartition donnée par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x+n}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

et puis

$$Y_n = \frac{S_n}{n}.$$

Montrer que (X_n) converge en probabilité vers 0, mais pas la suite (Y_n).

Solution: Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n+\varepsilon} \to 0.$$

Donc (X_n) converge vers 0. Mais pour (Y_n), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) &\geq \mathbb{P}(\max(X_1, \cdots, X_n) > n\varepsilon) \\
&= 1 - \prod_{ii=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq n\varepsilon) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{n(1+\varepsilon)}\right)^n \\
&\to 1 - \exp\left(-\frac{1}{1+\varepsilon}\right) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

donc la suite (Y_n) ne converge pas en probabilité vers 0.

Exercice 4.

Soit $b > 0$ et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de la même loi gamma de paramètre b. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Montrer que la suite
$$\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$$
converge p.s. vers un réel c que l'on précisera.

(b) Montrer que la suite
$$\left(\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - c\right)\right)_{n\geq 1}$$
converge en loi vers une loi limite que l'on précisera.

(c) Montrer que la suite
$$\left(n\left(\frac{S_n}{n} - c\right)^2\right)_{n\geq 1}$$
converge en loi vers une loi limite que l'on précisera.

(d) Montrer que la suite
$$\left(\sqrt{n}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 - c^2\right)\right)_{n\geq 1}$$
converge en loi vers une loi limite que l'on précisera. Plus généralement, si on a une fonction $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ de classe C^1, montrer que la suite
$$\left(\sqrt{n}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(c)\right)\right)_{n\geq 1}$$
converge en loi vers une loi limite que l'on précisera.

Solution: (a) Par la loi des grands nombres on a
$$\begin{aligned}\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1) &= \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^\infty t \cdot t^{b-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b)} \\ &= b.\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1^2) &= \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty t^2 \cdot t^{b-1} e^{-t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(b+2)}{\Gamma(b)} \\
&= b(b+1).
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = b$. Par le théorème central limite, on a

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - b\right) \stackrel{loi}{\to} \mathcal{N}(0, b).$$

(c) Puisque la fonction $g(x) := x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après (b), on a

$$n\left(\frac{S_n}{n} - b\right)^2 \stackrel{loi}{\to} g(\mathcal{N}(0, b)).$$

(d) On a

$$\sqrt{n}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(b)\right) = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - b\right) \cdot \frac{f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(b)}{\frac{S_n}{n} - b},$$

comme

$$\frac{S_n}{n} \stackrel{p.s.}{\to} b$$

on a

$$\frac{f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(b)}{\frac{S_n}{n} - b} \stackrel{p.s.}{\to} f'(b),$$

donc

$$\sqrt{n}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(b)\right) \stackrel{loi}{\to} f'(b)\mathcal{N}(0, b).$$

Exercice 5.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = ay(t), t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Montrer que $y(t) = ce^{at}$ est une solution pour tout $c \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que toute solution de (1) est de cette forme.

(c) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution de (1) t.q. $y(0) = y_0$.

Soit maintenant $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

(d) Trouver toutes les fonctions $c(t)$ telles que $c(t)e^{at}$ est une solution de (2). En déduire que toute solution de (2) satisfait l'identité

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s) \mathrm{d}s.$$

Réciproquement, montrer que cette fonction est solution de (2).

(e) Trouver l'unique solution de

$$y'(t) - 5y(t) = e^t, \quad y(0) = 7.$$

Pour $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère finalement l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

(f) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y'(t) = a(t)y(t)$.

(g) Montrer que l'équation (3) admet une unique solution, qu'on exprimera sous une forme intégrale explicite.

Solution: (a) $y'(t) = ace^{at} = ay(t)$.

(b) On l'omet.

(c) L'unique solution est $y(t) = y_0e^{at}$.

(d) On l'omet.

(e) $y(t) = 8e^{5t} - e^t$.

(f) Les solutions sont

$$y(t) = c \exp\left(- \int_0^t a(s) \mathrm{d}s \right), c \in \mathbb{R}.$$

(g) L'unique solution est

$$y(t) = \exp\left(- \int_0^t a(s) \mathrm{d}s \right) \cdot \left(y_0 + \int_0^t \exp\left(- \int_0^s a(w) \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}s \right).$$

Exercice 6.

On considère l'équation différentielle (2).

(a) Vrai ou faux: si $f(t)$ est T-périodique alors les solutions $y(t)$ de (2) sont T-périodique aussi.

(b) Dans le cas où $a < 0$, montrer que si $\lim_{t \to \infty} f(t) = L$, où $L \in \mathbb{R}$, alors toute solution $y(t)$ de (2) satisfait

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{L}{|a|}.$$

Solution: (a) Faux! Par exemple on prend $f(t) = 0$.

(b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 t.q. $t > N_0 \implies |f(t) - L| < \varepsilon$. Alors,

$$e^{at} \int_0^t e^{-as} f(s) \mathrm{d}s = e^{at} \left(\int_0^{N_0} + \int_{N_0}^t \right) e^{-as} f(s) \mathrm{d}s,$$

On a

$$e^{at} \int_0^{N_0} e^{-as} f(s) \mathrm{d}s \to 0$$

et on a aussi

$$e^{at} \int_{N_0}^t e^{-as} f(s) \mathrm{d}s \leq \frac{L + \varepsilon}{-a} (e^{-at} - e^{-aN_0}).$$

Donc on a

$$y(t) \leq e^{at}\left(y_0 + \int\limits_0^{N_0} e^{-as}f(s)\mathrm{d}s + \frac{L+\varepsilon}{a}e^{-aN_0}\right) - \frac{L+\varepsilon}{a},$$

ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\limsup y(t) \leq -\frac{L+\varepsilon}{a},$$

donc

$$\limsup y(t) \leq \frac{L}{|a|},$$

de même façon on peut montrer que

$$\liminf y(t) \geq \frac{L}{|a|},$$

donc

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{L}{|a|}.$$

TD13.1 Semaine 13, Mardi

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes.

(a) $y'(t) - \dfrac{2}{t^2-1} y(t) = 0$.

(b) $y'(t) = \dfrac{1}{t^2} y(t)(y(t)-1), t > 0, y(1) = 3$.

(c) $y'(t) = (y(t) + 3t)^3 - 3, t \in \mathbb{R}, y(1) = 3$.

(d) $(t^2-1)y'(t) + 2ty(t) = 0$.

(e) $y(t)(1-t^2)y'(t) = ty(t)^2 - \sin t \cos t$.

Solution: (a) Les solutions sont les fonctions qu'on décrit comme suivant:

Sur chaque intervalle I_i parmis les 2 suivants: $I_1 =]-\infty, -1[, I_2 =]-1, +\infty[$, il existe une constante $C_i \in \mathbb{R}$ t.q.

$$y(t) = C_i \frac{t-1}{t+1}.$$

(b) S'il existe un point t_0 t.q. $y(t_0) = 1$, alors par l'unicité de solution, $y(t) \equiv 1$. C'est pas possible car $y(1) = 3$.

Maintenant on suppose que $y(t) > 1$ pour tout $t > 0$. On a alors

$$\left(\ln \frac{y(t)-1}{y(t)}\right)' = \frac{1}{t^2},$$

donc il existe une constante $0 < C < 1$ t.q.

$$\frac{y(t)-1}{y(t)} = C \exp\left(-\frac{1}{t}\right),$$

on conclut que

$$y(t) = \frac{1}{1 - C\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}.$$

Comme $y(1) = 3$ on trouve que $C = \dfrac{2e}{3}$.

(c) On pose $g(t) := y(t) + 3t$, on a alors $g'(t) = g(t)^3$ et $g(1) = 6$.

Une observation est que $g(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Sinon, il existe un point t_0 t.q. $g(t_0) = 0$, alors par l'unicité de solution, $g(t) \equiv 0$. C'est pas possible car $g(1) = 6$.

Une autre observation est que

$$\left(\frac{1}{g(t)^2}\right)' = \frac{-2g'(t)}{g(t)^3} = -2,$$

donc

$$\frac{1}{g(t)^2} = -2t + C$$

Comme $g(1) = 6$ on a $C = \dfrac{73}{36}$ et donc

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{73}{36} - 2t}},$$

et donc

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{73}{36} - 2t}} - 3t.$$

Il faut attention que cette solution n'est pas globale: son intervalle maximal est $\left]-\dfrac{73}{72}, \dfrac{73}{72}\right[$.

(d) Les solutions sont les fonctions qu'on décrit comme suivant:

Sur chaque intervalle I_i parmis les 3 suivants: $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]1, +\infty[$, il existe une constante $C_i \in \mathbb{R}$ t.q.

$$y(t) = \frac{C_i}{(t-1)(t+1)}.$$

(e) On a

$$\begin{aligned}((1-t^2)y(t)^2)' &= 2(1-t^2)y(t)y(t)' - 2ty(t)^2 \\ &= -\sin 2t\end{aligned}.$$

donc

$$(1-t^2)y(t)^2 = -\sin^2 t + C$$

i.e.

$$y(t) = \pm\sqrt{\frac{C-\sin^2 t}{1-t^2}}$$

Si on cherche une solution globale (sur $\mathbb{R}$), alors pour que y soit continue en $t = \pm 1$, il faut que $C = \sin^2 1$. Mais dans ce cas $y(t)$ n'est pas bien définie sur $]-\infty,-1[$ et $]1,\infty[$. Donc le but d'y trouver une solution globale est un luxe.

Les solutions sont les fonctions qu'on décrit comme suivant:

Sur chaque intervalle I_i parmis les 3 suivants: $I_1 =]-\infty,-1[, I_2 =]-1,1[, I_3 =]1,+\infty[$, il existe une constante $C_i \in \mathbb{R}$ t.q.

$$y(t) = \pm\sqrt{\frac{C-\sin^2 t}{1-t^2}}.$$

Pour que la solution soit bien définie, il faut que $C_1 \leq 0, C_2 \geq 1$ et $C_3 \leq 0$.

Exercice 2.

Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes

(a) $3y'(t) + 4y(t) = 4t + 1$

(b) $y'(t) = y(t) + 2\cos(3t)$

(c) $y'(t) + 5y(t) = 2t^2 - t$ et $y(0) = 0$.

Solution: (a) Résoudre d'abord l'équation homogène $3y'(t) + 4y(t) = 0$, les solutions sont:

$$y(t) = C\exp\left(-\frac{4}{3}t\right), C \in \mathbb{R}.$$

On observe que la fonction $y_0(t) = t - \frac{1}{2}$ est une solution pour l'équation originale, donc les solutions sont:

$$y(t) = t - \frac{1}{2} + C\exp\left(-\frac{4}{3}t\right), C \in \mathbb{R}.$$

(b) En cherchant une solution de forme $y(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$ on trouve une solution particulière avec $A = -\frac{1}{5}$ et $B = \frac{3}{5}$. Donc les solutions sont

$$y(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t) + \frac{3}{5}\sin(3t) + Ce^t, C \in \mathbb{R}.$$

(c) Les solutions sont

$$y(t) = \frac{2}{5}t^2 - \frac{9}{25}t + \frac{9}{125} + Ce^{-5t}, C \in \mathbb{R}.$$

Puisque $y(0) = 0$, on a $C = -\frac{9}{125}$.

Exercice 3.

Résoudre les équations différentielles suivantes.

(a) $ty'(t) + 2y(t) = 4t^2, t > 0, y(1) = 2.$

(b) $y'(t) + \frac{y(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^3}, t > 0, y(1) = 1.$

Solution: (a) On a $(t^2y(t))' = t^2y'(t) + 2ty(t) = 4t^3$, donc $t^2y(t) = t^4 + C, C \in \mathbb{R}$, comme $y(1) = 2$, on a $C = 1$, donc

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

(b) La solution est

$$y(t) = -1 - \frac{1}{t} + \frac{3}{e}\exp\left(\frac{1}{t}\right).$$

Exercice 4.

On considère une équation différentielle générale de la forme

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

avec $f : I \to \mathbb{R}$ continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Indiquer comment résoudre ce problème en utilisant le changement d'inconnue $y(t) = tu(t)$. Résoudre les équations différentielles suivantes

(a) $y' = \dfrac{y^2 + ty - t^2}{t^2}$.

(b) $y' = \dfrac{y+1}{t+2} - \exp\left(\dfrac{y+1}{t+2}\right)$.

Solution: Posons $y(t) = tu(t)$, alors $y' = u + tu' = f(u)$, donc

$$u' = \frac{f(u) - u}{t}.$$

(a) On a $u + tu' = u^2 + u - 1 \implies tu' = u^2 - 1$. Résoudre d'abord l'équation sur $I \setminus \{0\}$, qui est soit un intervalle, soit l'union de deux intervalles (on vera que les solutions s'étendent automatiquement en 0). Sur chaque intervalle, on a

$$u' = \frac{u^2 - 1}{t},$$

Les solutions constantes $u = \pm 1$ donne les solutions $y = \pm t$. Par l'unicité de solution, on suppose maintenant que $u(t) \neq \pm 1, \forall t \in I$. Alors

$$\left(\ln \frac{u-1}{u+1}\right)' = \frac{2}{t},$$

ce qui donne

$$u(t) = \frac{1 + ct^2}{1 - ct^2}, c \in \mathbb{R}.$$

Quelles valeurs pour c sont possibles? Cela dépend de l'intervalle.

(b) Résoudre d'abord l'équation sur $I \setminus \{-2\}$, qui est soit un intervalle, soit l'union de deux intervalles. Sur chaque intervalle, posons $g(t) = y(t) + 1 = (t+2)u(t)$, alors on a $(t+2)u' = -e^u$, donc $u = -\ln \ln c|t+2|$, où $c \in \mathbb{R}$ une constante.

Attention: il faut que $c|t+2| > 1$ sur l'intervalle pour que la solution soit bien définie. Donc ce n'est possible d'avoir une solution que pour les intervalles I tels que la distance entre -2 et I est strictement positive: $d(-2, I) > 0$.

Exercice 5.

(a) L'équation de Bernoulli est de la forme

$$y'(t) = a(t)y(t)^\alpha + b(t)y(t),$$

avec a et b continues sur un intervalle I. On cherche des solutions> 0. On effectue le changement de variable $z = y^{1-\alpha}$ qui ramène à une équation linéaire en z.

(b) L'équation de Riccati est

$$y'(t) = a(t)y(t)^2 + b(t)y(t) + c(t),$$

avec a et b continues sur l'intervalle I. Si l'on connaît une solution y_1 de cette équation, $z = y - y_1$ vérifie une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$ et $u = z^{-1}$ vérifie une équation linéaire.

(c) Trouver toutes les solutions, sur les intervalles inclus dans $\mathbb{R}_{>0}$, des équations différentielles suivantes

$$2ty' + y + 3t^2y^2 = 0,$$

$$t^2y' = t^2y^2 + ty + 1,$$

en cherchant une solution particulière de la deuxième sous la forme $y(t) = -t^n$.

Solution: (a) On a

$$\begin{aligned} z' &= (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \\ &= (1-\alpha)a(t) + (1-\alpha)b(t)z \end{aligned}$$

(b) On a

$$z' + y_1' = a(t)(z^2 + y_1^2 + 2zy_1) + b(t)(z + y_1) + c(t),$$

donc $z' = a(t)z^2 + (2a(t)y_1 + b(t))z$. Alors on a

$$u' = -\frac{z'}{z^2} = -a(t) - (2a(t)y_1 + b(t))u.$$

(c) Pour l'équation différentielle

$$2ty' + y + 3t^2y^2 = 0,$$

S'il existe un point où y s'annule, alors $y(t) \equiv 0$ par l'unicité de solution (car $t \in \mathbb{R}_{>0}$). Sinon, posons $z = y^{-1}$, alors

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{3t}{2} + \frac{z}{2t}.$$

Donc $z(t) = t^2 + C\sqrt{t}, C \in \mathbb{R}$, ainsi

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + C\sqrt{t}}.$$

Pour l'équation différentielle

$$t^2y' = t^2y^2 + ty + 1,$$

comme $y_1(t) = t^{-1}$ est une solution particulière, posons $z = y - y_1$, alors

$$z' = z^2 - \frac{1}{t}z,$$

c'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. Comme l'équation différentielle précédente, on cherche les solutions non nulles donc on suppose $z(t) \neq 0, \forall t$. On pose $u = z^{-1}$, alors

$$u' = \frac{u}{t} - 1.$$

Les solutions sont $u(t) = Ct - t\ln t, C \in \mathbb{R}$. Donc

$$y(t) = \frac{1}{t(C - \ln t)} - \frac{1}{t}.$$

Exercice 6.

Montrer que la fonction

$$f(t,x) := \begin{cases} \sqrt{|t|}\sin\left(\dfrac{x}{|t|}\right), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$, qu'elle est C^1 en x pour tout t fixé mais n'est pas localement lipschitzienne en x.

Solution: Elle est évidemment continue sur $\{t \neq 0\}$, pour montrer qu'elle est continue en point $(0,x)$, il suffit d'observer que

$$|f(t,y) - f(0,x)| \leq |\sqrt{t}|.$$

Pour tout t fixé, elle est évidemment C^1 en x.

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}|t|$, on a

$$\frac{|f(t,0) - f(t,x)|}{|(t,0) - (t,x)|} = \frac{\pi}{2\sqrt{|t|}} \to 0$$

lorsque $t \to 0$, donc f n'est pas localement lipschitzienne en x.

TD13.2 Semaine 13, Jeudi

Exercice 1.(Condensateur)

Chargeant un condensateur est décrit par l'équation différentielle

$$RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V_0,$$

où $Q(t)$ est le charge du condensateur, C la capacité éléctrique, V_0 la tension éléctrique donnée et R la résistance. Supposons que le condensateur n'est pas chargé en $t = 0$, déterminer $Q(t)$. Qu'est-ce qu'on peut dire lorsque $t \to \infty$?

Solution: On voit facilement que

$$Q(t) = CV_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\right).$$

Donc $Q(t) \to CV_0$ lorsque $t \to \infty$.

Exercice 2.

Faire une investigation sur l'unicité de l'équation différentielle

$$y'(t) = \begin{cases} -t\sqrt{y}, & y \geq 0 \\ t\sqrt{-y}, y < 0. \end{cases}$$

Montrer que le problème avec valeur initiale $y(0) = y_0$ possède une unique solution pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$.

Indication: Si $y(t)$ est une solution, alors $-y(t)$ est aussi une solution et $y(-t)$ est encore une solution, donc il suffit de considérer le cas où $y_0 \geq 0$ et $t \geq 0$.

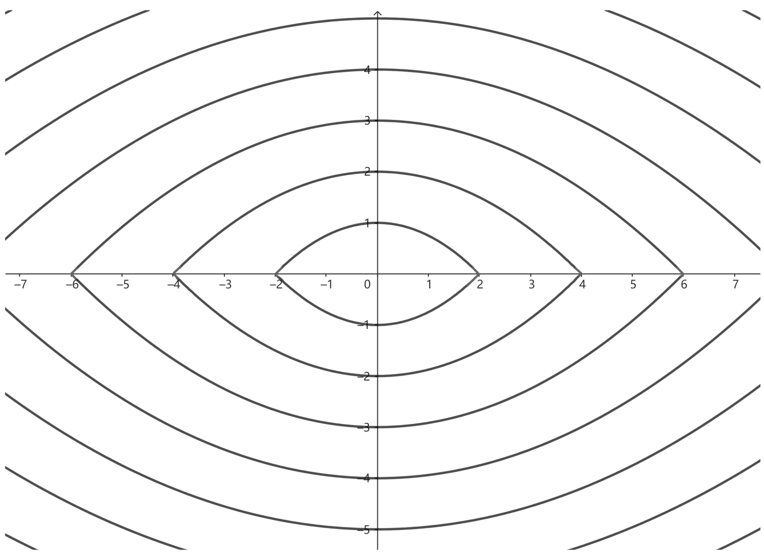
Solution: Sous ces réstrictions, comme on a

$$(2\sqrt{y})' = \frac{y'}{\sqrt{y}} = -t,$$

l'unique solution avec $y(0) = y_0$ est

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{y_0}\left(1 - \frac{t^2}{4\sqrt{y_0}}\right), & t^2 \leq 4\sqrt{y_0} \\ 0, & t^2 \geq \sqrt{y_0}. \end{cases}$$

On peut voir l'illustration suivante:



Exercice 3.

Résoudre le problème avec valeur initiale suivant

$$y'(t) = e^{y(t)} \sin t, y(0) = y_0.$$

Discuter le comportement différent des solution, dépendant de la valeur initiale y_0.

Indication: Si $y(t)$ est une solution, alors $y(-t)$ est aussi une solution et $y(t+2n\pi)$ est encore une solution.

Solution: Puisque $e^{-y}y' = \sin t$, on a $-e^{-y} = -\cos t + C, C < -1$. Puisque $y(0) = y_0$, on a $C = 1 - e^{-y_0}$. Donc

$$y = -\ln(\cos t + e^{-y_0} - 1).$$

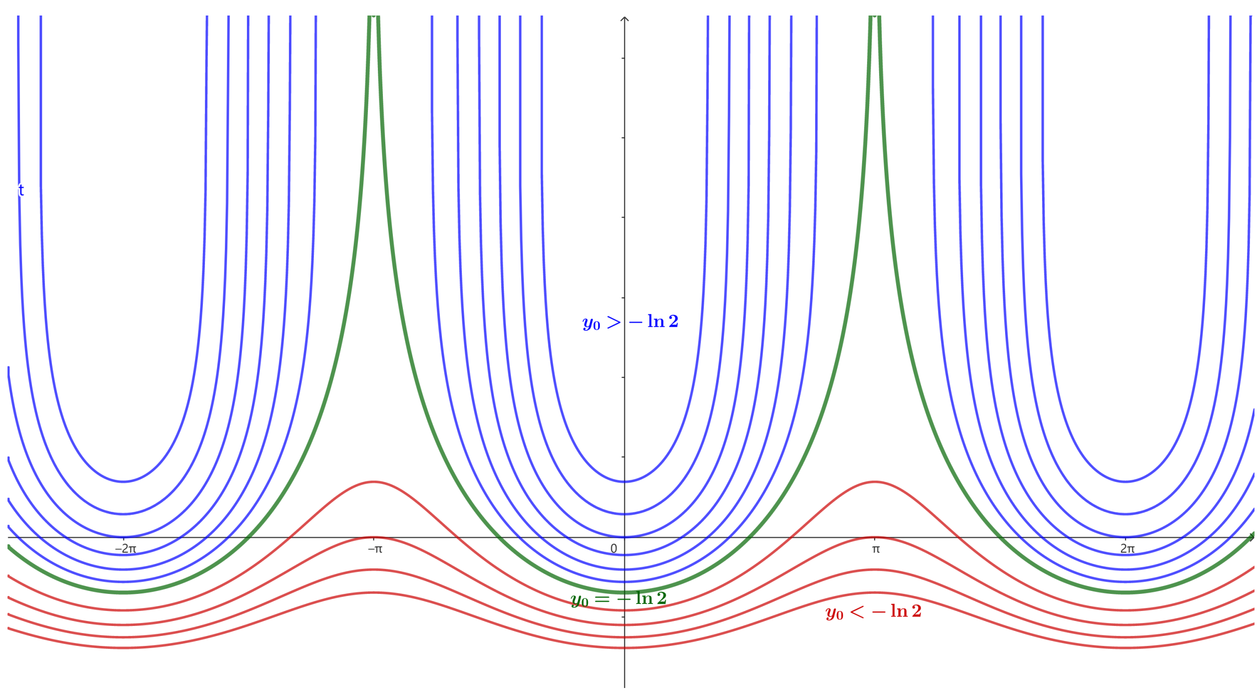
On doit avoir $\cos t + e^{-y_0} - 1$ pour t dans la domaine de définition de la solution!

Si $e^{-y_0} = 2$, i.e. $y_0 = -\ln 2$, alors $y(t) = -\ln(1+\cos t), t \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$. On a aussi $y(t) \to +\infty$ lorsque $t \to (2k-1)\pi$ ou $t \to (2k+1)\pi$.

Si $e^{-y_0} > 2$, i.e. $y_0 < -\ln 2$, alors $y(t) = -\ln(\cos t + e^{-y_0} - 1)$ est une solution globale, elle est périodique donc bornée.

Si $e^{-y_0} > 2$, i.e. $y_0 < -\ln 2$, alors $y(t) = -\ln(\cos t + e^{-y_0} - 1)$ est définie sur les intervalles $(-\arccos(1 - e^{-y_0}), \arccos(1 - e^{-y_0})) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Voici une illustration:



Exercice 4.

Pour chacun des problème de Cauchy suivants, a-t-on existence et/ou unicité de la solution dans un voisinage de 0? Si elle existe, déterminer la solution maximale

$$(1) \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} y' = \dfrac{1+y^2}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (4) \begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Solution: (1) On a existence et unicité, la solution maximale est

$$y = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right), -\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}.$$

(2) $(y^2)' = 2(1+y^2) \implies 1 + y^2 = Ce^{2t}$, on a $C = 2$ car $y(0) = 1$. Donc On a existence et unicité, la solution maximale est

$$y(t) = \sqrt{2e^{2t} - 1}, t > \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

(3) et (4) Si $y \neq 0$, alors on a

$$\left(y^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = \frac{2}{3}.$$

Si $y(0) = 1$, alors on a existence et unicité, la solution maximale est

$$y(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}t + 1\right)^{\frac{3}{2}}, & t \geq -\dfrac{3}{2} \\ 0, & t < -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Si $y(0) = 0$, alors on a existence mais on n'a pas unicité, par exemple, les deux suivantes sont solutions

$$y(t) = \begin{cases} \pm\left(\dfrac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

TD14.1 Semaine 14, Mardi

Exercice 1.

Les fonctions suivantes sont-elles lipschitziennes ou localement lipschitziennes en x, uniformément par rapport à t, sur les ouverts proposés?

(a) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t,x) = e^{tx}$

(b) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t,x) = t\sqrt{|x|}$

(c) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t,x) = \sin(tx^2)$

(d) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(t,x) = \ln(1+t^2)|x|$

(e) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, f(t,x) = (|x_1 + x_2|, \cos x_2)$

(f) $U =]0,1[\times \mathbb{R}, f(t,x) = \dfrac{\arctan x}{t}$

Que peut-on en déduire concernant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, (t_0, y_0) \in U, \end{cases}$$

avec f l'une des fonctions étudiées ci-dessue?

Solution: On omet...

Exercice 2.(Lemme de Gronwall)

Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité de Gronwall.

(a) Soit $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]t_0, t_1[$. Soit $v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathbb{L}^1_{loc}$ telle que

$$f'(t) \leq v(t)f(t), \forall t \in [t_0, t_1].$$

Montrer que

$$f(t) \leq f(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} v(s)\mathrm{d}s\right), \forall t \in [t_0, t_1].$$

(b) Soient $C \in \mathbb{R}, u, v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec $v \geq 0$ telles que

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\mathrm{d}s, \forall t \in [t_0, t_1].$$

Montrer que

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right), \forall t \in [t_0, t_1].$$

Solution: (a) On observe que

$$\left(\exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} v(s)\mathrm{d}s\right) f(t)\right)' \leq 0,$$

d'où le résultat.

(b) Posons

$$\phi(t) = C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\mathrm{d}s,$$

on a $\phi'(t) \leq \phi(t)v(t)$.

Alors, par (a), on a

$$\phi(t) \leq \phi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} v(s)\mathrm{d}s\right),$$

donc

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right), \forall t \in [t_0, t_1].$$

Exercice 3.

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ globalement lipschitzien en y, uniformément par rapport à t. Montrer que les solutions maximales sont globales.

Solution: Puisque $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ globalement lipschitzien en y, uniformément par rapport à t, on a

$$|f(t, y(t)) - f(t, y_0)| \leq C_1 |y(t) - y_0|$$

Pour tout intervalle borné $[-T, T]$, on a $f(t, y_0) = C_2(T)$.

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y(t) - y_0|^2 &= 2\langle y(t) - y_0, f(t, y(t))\rangle \\ &\leq 2|y(t) - y_0|(C_2(T) + C_1|y(t) - y_0|) \\ &= (2C_1 + 1)|y(t) - y_0|^2 + C_2(T)^2. \end{aligned}$$

On obtient donc que $y(t)$ est bornée sur $[-T, T]$, donc par sortie des compacts, les solutions maximales sont globales.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un champ satisfaisant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, et y, z définies et dérivables sur un ouvert I de $\mathbb{R}$ telles que

$$y'(t) < f(t, y(t)), z'(t) = f(t, z(t)).$$

On suppose que pour un certain $t_0 \in I, y(t_0) < z(t_0)$.

(a) Prouver que pour tout $t \in I \cap [t_0, +\infty[, y(t) < z(t)$.

(b) Application: soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f > 0$. Montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 + f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

n'est pas globale.

Solution: (a) Posons $h(t) = z(t) - y(t)$, alors $h(t_0) > 0$.

S'il exists $t_1 > t_0$ t.q. $h(t_1) = 0$, on peut supposer que $h > 0$ sur $[t_0, t_1[$, alors

$$h'(t_1) = f(t_1, z(t_1)) - f(t_1, y(t_1)) = 0.$$

Mais on a $h > 0$ sur $[t_0, t_1[$, donc $h'(t_1) \leq 0$, contradiction!

(b) Posons z la solution de

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^2 \\ z(0) = \dfrac{y_0}{2}, \end{cases}$$

alors y et z satisfaient les condition de (a), comme z "explose" en $\dfrac{2}{y_0}$, y y explose aussi, on obtient que y n'est pas globale.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

(a) On suppose que f vérifie $\forall t, \forall x \neq 0, x f(t, x) < 0$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle sont définies jusqu'à $+\infty$ et admettent une asymptote horizontale.

(b) On suppose maintenant que l'équation est à variables séparables i.e. $f(t, x) = g(x) h(t)$, avec g de classe C^1 et h de classe C^0. On choisit deux zéros consécutifs $x_1 < x_2$ de la fonction g. Et on choisit une condition initiale t_0, y_0, avec $y_0 \in]x_1, x_2[$. Montrer qu'alors la solution maximale telle que $y(t_0) = y_0$ est globale.

(c) Application:

i. Résoudre explicitement l'équation $y' = y(y-1)\cos t$.

ii. Montrer qu'aucune solution autre que les solutions constantes ne possède d'asymptote horizontale. Peut-on raisonner sans utiliser la forme explicite des solutions?

iii. Dessiner l'allure générale des solutions, en distinguant suivant la position de $y(0)$ par rapport à 0 et 1.

Solution: (a) Pour montrer que les solutions sont globales, il suffit d'observer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y|^2 = 2yf(t,y) < 0.$$

Cela implique aussi que la solution admet une asymptote horizontale.

(b) S'il existe t_1 t.q. $y(t_1) = x_2$, alors par l'unicité, $y \equiv x_2$.

Donc on a $y(t) \in [x_1, x_2]$, cette solution est bornée, donc globale.

(c) i. On a

$$y'\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) = \cos t,$$

donc on a

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \sin t + C,$$

donc il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q.

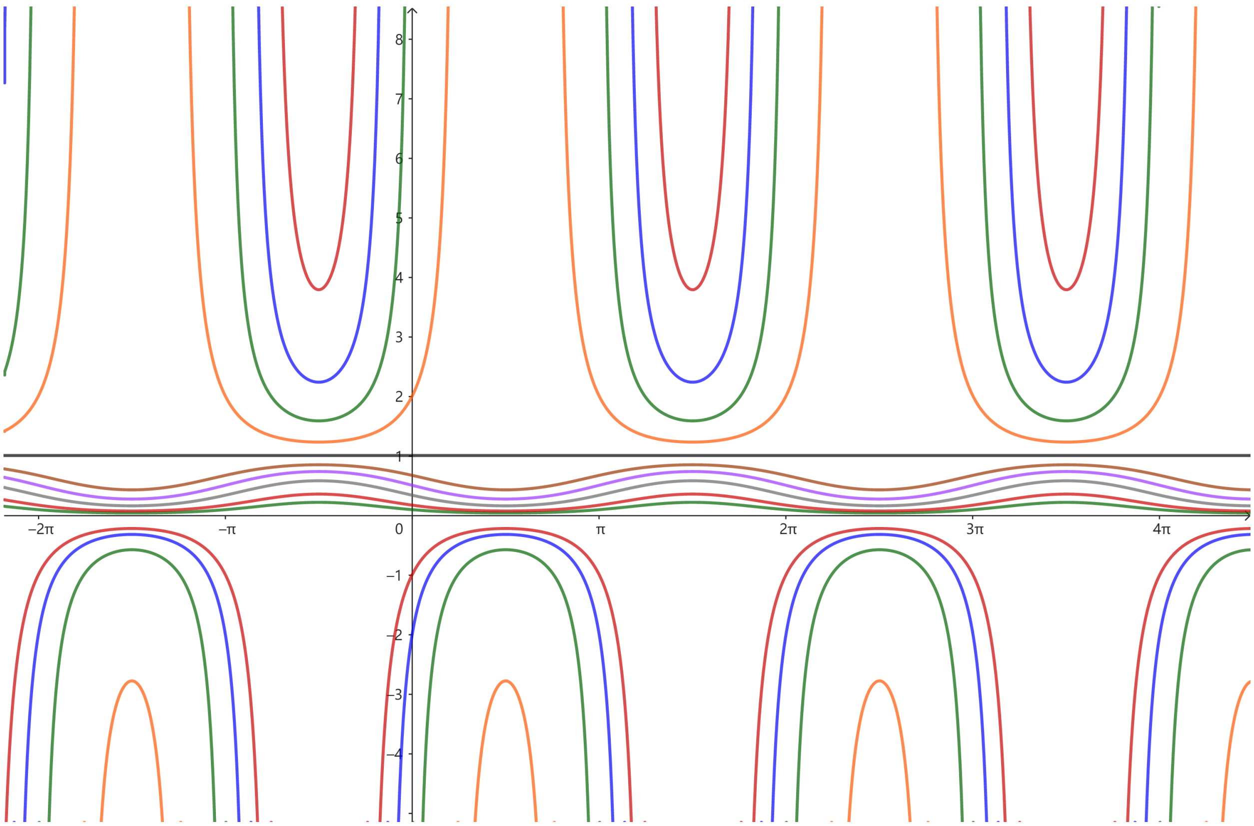
$$\frac{y-1}{y} = Ce^{\sin t},$$

donc

$$y(t) = \frac{1}{1 - Ce^{\sin t}}.$$

ii. On voit clairement par la forme explicite de solution qu'elle n'a pas d'asymptote horizontale sauf si elle est constante.

iii. Voici une figure:



Exercice 6.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, et le problème de Cauchy suivant, posé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = (y+1)(y-1), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

(a) Si $y_0 \in]-1, 1[$, montrer que la solution maximale est globale, et converge vers ∓ 1 en $\pm\infty$.

(b) Montrer que si $y_0 > 1$, alors l'intervalle d'existence de la solution maximale est borné supérieurement.

Solution: (a) Si $y_0 \in]-1,1[$, alors par unicité de solution on peut montrer que $y(t) \in]-1,1[$, la solution est donc bornée, elle est ainsi globale.

On a alors $y' = (y+1)(y-1) < 0$, donc y est décroissante.

Pour $t > 0$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y+1)^2 = 2(y+1)^2(y-1) \leq 2(y_0-1)(y+1)^2,$$

donc $(y+1)^2 \leq (y_0+1)^2 e^{2(y_0-1)t} \to 0$ lorsque $t \to \infty$, donc

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = -1.$$

Similairement,

$$\lim_{t\to-\infty} y(t) = 1.$$

(b) On a $y(t) > 0$, donc $y' = (y+1)(y-1) > 0$, y est croissante. Posons $z = y - 1 > 0$, alors $z' = z(z+2) > z^2$. Ceci implique que

$$\left(\frac{1}{z}\right)' \leq -1,$$

donc

$$z(t) \geq \frac{1}{\frac{1}{y_0-1} - t},$$

l'intervalle d'existence de la solution maximale est donc borné supérieurement.

Exercice 7.

Pour $y_0 \in \mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y' = \sin y(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{4}$$

(a) Montrer que le problème (4) admet une unique solution maximale y. Montrer que cette solution est globale. Montrer de plus que cette solution est de classe C^∞.

(b) Quelles sont les solutions comstantes de (4)?

(c) On suppose que $0 < y_0 < \pi$. Montrer que

(i) $\forall t \in \mathbb{R}, 0 < y(t) < \pi$,

(ii) $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 0, \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \pi$.

Solution: (a) Comme $|y'| = |\sin y| \leq 1$, la solution est bornée dans tout intervalle borné, par sortie des compacts, la solution maximale est globale. La solution est clairement de classe C^∞.

(b) $y(t) \equiv k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(c)(i) Par unicité de solution.

(ii) $y' = \sin y > 0$ donc y est croissante, donc les limites existent. On a

$$c := \lim_{t\to\infty} y(t) \leq \pi.$$

Si $c < \pi$, alors $y'(t) \to \sin c > 0$ lorsque $t \to \infty$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, t > A \implies y'(t) \geq \sin c - \varepsilon.$$

Alors on a

$$\pi > y(t) - y(A) \geq (\sin c - \varepsilon)(t - A) \to \infty,$$

une contradiction! Donc $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \pi$, similairement $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 0$.

TD14.2 Semaine 14, Jeudi

Exercice 1.

On dit qu'une fonctione croissante $\rho : [0, \infty[\to [0, \infty[$ avec $\rho(0) = 0$ est un module de continuité. On dit qu'un module de continuité satisfait la condition d'Osgood si

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{\rho(r)} = \infty. \tag{5}$$

On considère le problème avec valeur initiale

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{6}$$

où $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ouvert contenant (t_0, y_0). Suppose que

$$|(x - z) \cdot (f(t, x) - f(t, z))| \leq C|x - z|\rho(|x - z|)$$

dans U avec ρ un module de continuité qui satisfait la condition d'Osgood (5). Montrer que la solution de (6) est unique.

Solution: S'il y a 2 solutions y_1 et y_2, soit $t_1 > t_0$ t.q. $|y_1(t_1) - y_2(t_1)| > 0$. Posons

$$\bar{t} := \sup_{t \in [t_0, t_1]} \{t : y_1(t) = y_2(t)\}.$$

Posons $r = y_1 - y_2$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r \leq c\rho(r),$$

donc

$$+\infty = \int_0^{r(t_1)} \frac{\mathrm{d}r}{\rho(r)} \leq c \int_{\bar{t}}^{t_1} \mathrm{d}t < +\infty,$$

une contradiction!

Exercice 2.

Soit $a > -1$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log(1+y), \\ y(0) = a, \end{cases} \tag{7}$$

On notera $y_a(t)$ la solution maximale de (7) définie sur $I_a =]T_a^-, T_a^+[\subset \mathbb{R}$.

(a) Déterminer l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ sur lequel l'équation est définie.

(b) Trouver toutes les solutions constantes de (7).

(c) Montrer que, pour $a \neq 0$, la solution $y_a(t)$ ne change pas de signe.

(d) Montrer que les limites $l_a^\pm = \lim\limits_{t \to T_a^\pm} y_a(t)$ existent et les calculer.

(e) Déterminer $T_a^\pm$ et tracer l'allure des solutions de (7).

Solution: (a) $\Omega =]-1, +\infty[$.

(b) $y \equiv 0$.

(c) Par unicité de solution.

(d) et (e) Si $a > 0$, alors $y > 0, y' > 0$, donc $T_a^- = -\infty$ et $y' \to 0$ losque $t \to -\infty$, donc on a $l_a^- = 0$. On va montrer que $T_a^+ = +\infty$ et $l_a^+ = +\infty$. Si, par l'absurd, $T_a^+ < \infty$, alors $l_a^+ = +\infty$, on a

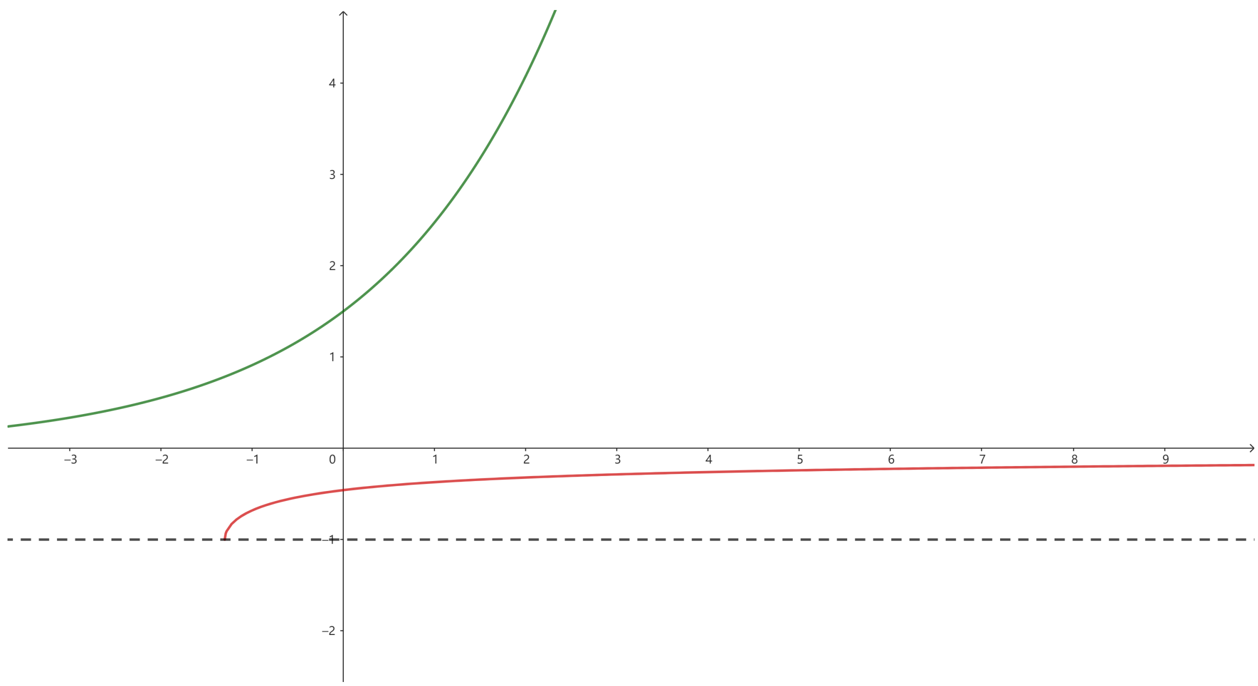
$$+\infty = \int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau \log(1+\tau)} = \int_0^{T_a^+} \frac{y' \mathrm{d}t}{y \log(1+y)} = T_a^+ < \infty,$$

une contradiction! Donc $T_a^+ = +\infty$.

Maintenant, si $l_a^+ < +\infty$, alors $y' \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, on a alors $l_a^+ = 0$, contradiction! Donc $l_a^+ = +\infty$.

Si $-1 < a < 0$, alors $-1 < y(t) < 0$. Par un argument similaire, on obtient que $T_a^{+\infty} = +\infty, l_a^+ = 0, T_a^- > -\infty, l_a^- = -1$.

Voici l'allure:



Exercice 3.

Donner les solutions de

$$y' = y(\ln y)^\beta, \qquad y(0) = y_0 > 1$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de β les solutions "explosent"? Pour quelles valeurs de β sont-elles globales?

Solution: S'il existe t_0 t.q. $y(t_0) = 1$, alors par unicité $y \equiv 1$. Donc on peut supposer que $y(t) > 1, \forall t$.

Posons $z = \ln y$, alors $z' = z^\beta$ et on a $z(t) > 0, \forall t$.

Si $\beta = 1$, alors $\ln z = t + C_0$, donc $z = Ce^t$ et $y = e^{Ce^t}$ est globale.

Si $\beta \neq 1$, alors $(z^{1-\beta})' = 1 - \beta$, donc $z^{1-\beta} = C + (1-\beta)t$. Comme $z > 0$, la solution explosent.

Exercice 4.

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -\nabla F(y(t)), \\ y(t_0) = a, \end{cases} \tag{8}$$

ou ∇F désigne le gradient de F. On suppose de plus que

$$\lim_{|x| \to \infty} F(x) = +\infty.$$

(a) Montrer que (8) admet une unique solution maximale $y(t)$ sur $]t_-, t_+[$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto F(y(t))$ est décroissante. En déduire que $t_+ = +\infty$.

(c) En considérant le cas

$$n = 1, \qquad F(x) = \frac{x^4}{4},$$

montrer que l'on peut avoir $t_- > -\infty$.

Solution: (a) Cauchy-Lipschitz.

(b) On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |F(y(t))|^2 = \nabla F(y(t)) \cdot y'(t) = -|\nabla F|^2 \leq 0,$$

donc $t \mapsto F(y(t))$ est décroissante.

Par sortie des compacts, on a $t_+ = +\infty$.

(c) On a $y' = -y^3$ et donc $y(t) = \sqrt{a^2 + 2t}$, alors

$$t_- = -\frac{a^2}{2} > -\infty.$$

Exercice 5.

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y - 1, \\ y(0) = a, \end{cases} \tag{9}$$

(a) On note $y_a(t)$ la solution maximale de (9) définie sur $I_a =]T_a^-, T_a^+[\subset \mathbb{R}$.

i. Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale.

ii. Quelle est la solution pour $a = 0$?

(b) On suppose que $a > 0$.

i. Montrer que $y_a(t) > 0$ pour tout $t \in I_a$.

ii. Montrer que y_a est croissante. En déduire que $y'(t)e^{-y(t)} \geq 1 - e^{-a}$ pour tout $t \in I_a \cap [0, +\infty[$.

iii. Montrer que la solution n'est pas globale: $T_a^+ < +\infty$.

(c) On suppose que $a < 0$.

i. Montrer que $y_a(t) < 0$ pour tout $t \in I_a$.

ii. Montrer que y_a est décroissante. En déduire que $a - t \leq y(t) \leq a$ pour tout $t \in I_a \cap [0, +\infty[$.

iii. Montrer que la solution est globale.

(d) Tracer l'allure des solutions.

Solution: (a)i. Cauchy-Lipschitz.

ii. $y \equiv 0$.

(b)i. Sinon, il existe t_0 t.q. $y_a(t_0) = 0$, alors par l'unicité $y \equiv 0$, une contradiction.

ii. $y_a' = e^{y_a} - 1 > 0$ car $y_a > 0$, donc y_a est croissante. On en déduire que

$$y'(t)e^{-y(t)} = 1 - e^{-y(t)} \geq 1 - e^{-a}, \forall t \in I_a \cap [0, +\infty[.$$

iii. On déduire de l'exercice précédent que $(e^{-y(t)})' \leq -(1 - e^{-a})$, donc

$$0 < e^{-y(t)} \leq -(1 - e^{-a})t + e^{-a},$$

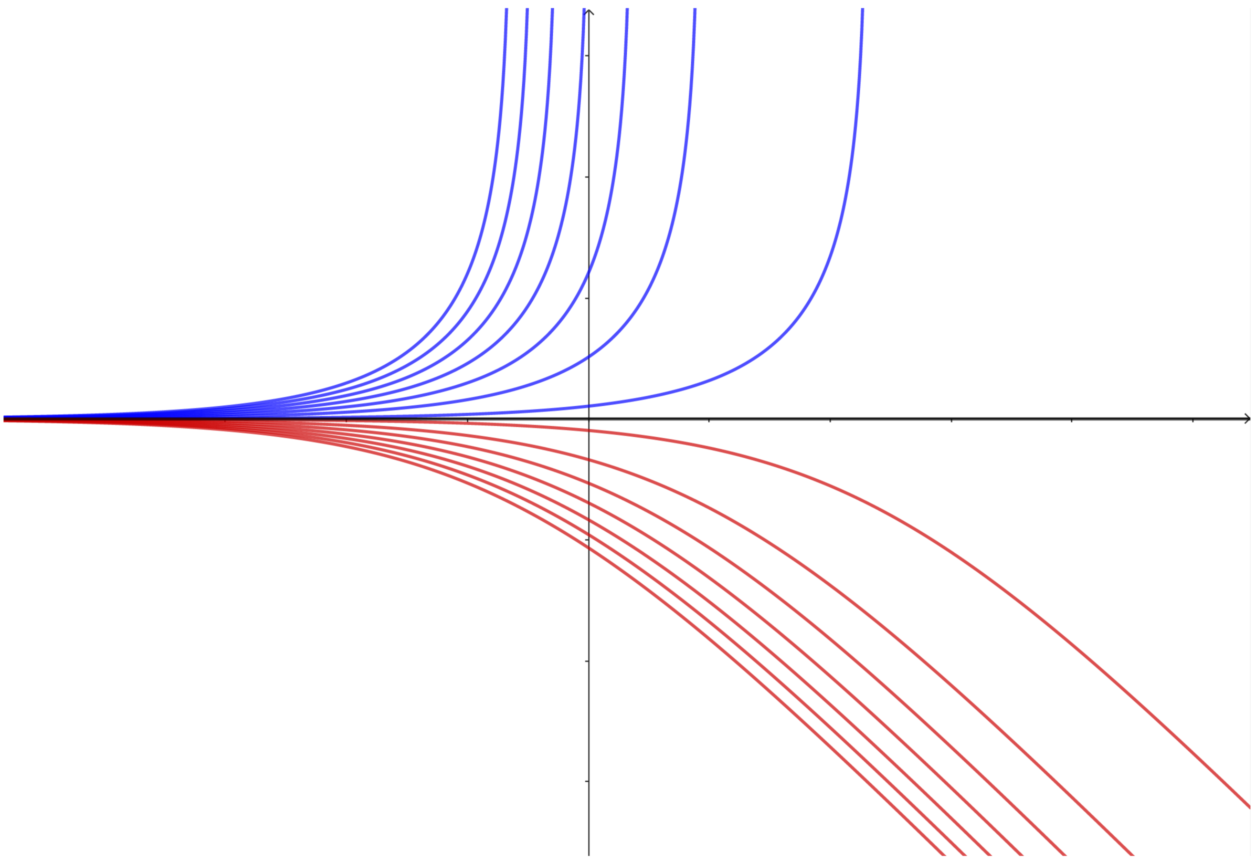
donc $T_+ < +\infty$.

(c)i. Similaire que (b)i.

ii. $y_a' = e^{y_a} - 1 < 0$ car $y_a < 0$, donc y_a est décroissante. Comme $y' \geq -1$ pour tout $t \in I_a \cap [0, +\infty[$, on obtient que $a - t \leq y(t) \leq a$ pour tout $t \in I_a \cap [0, +\infty[$.

iii. Sortie des compacts.

(d) Voici l'allure



Remarque: En effet, on peut donner directement les solution:

$$y(t) = -\ln(1 - Ce^t), C \in \mathbb{R}.$$

Ces solutions satisfaient trivialement les propriétés montrées.

Exercice 6.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, On considère le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{10}$$

où $f \in C^1(\mathbb{R})$ avec un nombre fini de points d'annulation $x_1 < \cdots < x_N$.

(a) Montrer que si $x_i \le y_0 \le x_{i+1}$ alors la soution du (10) est globale. Montrer que les limites $l_a^{\pm} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t)$ existent et les calculer.

(b) On suppose que $f(x) > 0$ pour $x > x_N$. Soit $y_0 > x_N$.

i. Montrer que la solution de (10) est définie sur $]-\infty, T_+[$.

ii. Montrer que $T_+ < \infty$ s.s.i. $\dfrac{1}{f}$ est $\mathbb{L}^1$ en $+\infty$.

(c) Que peut on dire si $f(x) < 0$ pour $x > x_N$? Que peut on dire si $y_0 < x_1$?

Solution: (a) Par unicité on peut montrer que $x_i \le y(t) \le x_{i+1}, \forall t$. Par sortie des compacts, la solution est globale.

Comme f ne change pas de signe sur $]x_i, x_{i+1}[$, y est monotone, donc les limites existent. On voit facilement que y' admet une limite en $\pm\infty$ et puis la limite est 0, donc on a $l_a^{\pm} \in \{x_i, x_{i+1}\}$. Si $f > 0$ sur $]x_i, x_{i+1}[$, alors $l_a^- = x_i, l_a^+ = x_{i+1}$; Si $f < 0$ sur $]x_i, x_{i+1}[$, alors $l_a^- = x_{i+1}, l_a^+ = x_i$.

(b)i. On a $y(t) > x_N$ par unicité et donc $y' > 0$, donc y est croissante. Par sortie des compacts, elle est définie sur $]-\infty, T_+[$.

ii. On a

$$\begin{aligned} T_+ - A &= \int_A^{T_+} \mathrm{d}t = \int_A^{T_+} \frac{y'(t)}{f(y(t))} \mathrm{d}t \\ &= \int_A^{T_+} \frac{\mathrm{d}y(t)}{f(y(t))} = \int_{y(A)}^{\infty} \frac{1}{f(y)} \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

donc $T_+ < \infty$ s.s.i. $\dfrac{1}{f}$ est $\mathbb{L}^1$ en $+\infty$.

(c) Si $f(x) < 0$ pour $x > x_N$, alors $T_+ = +\infty$ et $T_- > -\infty$ s.s.i. $\dfrac{1}{f}$ est $\mathbb{L}^1$ en $+\infty$.

Si $y_0 < x_1$ et $f(x) < 0$ pour $x < x_1$, alors $T_- = -\infty$ et $T_+ < \infty$ s.s.i. $\dfrac{1}{f}$ est $\mathbb{L}^1$ en $-\infty$;

Si $y_0 < x_1$ et $f(x) > 0$ pour $x < x_1$, alors $T_+ = -\infty$ et $T_- > -\infty$ s.s.i. $\dfrac{1}{f}$ est $\mathbb{L}^1$ en $-\infty$.

TD15.1 Semaine 15, Mardi

Exercice 1.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{11}$$

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $y(t) = e^{\lambda t}$ est une solution de (11) s.s.i. λ est une solution de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{12}$$

(b) Trouver la condition sur a, b, c pour qu'on peut trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sont solutions de (11).

(c) Si la condition n'est pas satisfaite, donner deux olutions linéairement indépendantes de (11).

(d) Soit $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Sous la condition de (b), montrer que le système

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1, \end{cases}$$

a une solution.

Solution: (a) Trivial.

(b) $b^2 - 4ac > 0$.

(c) $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

(d) Dans ce cas, la solution est $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ avec

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y_0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = y_1 \end{cases}$$

comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la solution est unique.

Exercice 2.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)e^{\gamma t} \tag{13}$$

où P un polynôme de degré d et $\gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $E_m = \{Q(t)e^{\gamma t} : Q \text{ polynôme de degré} \leq m\}$ est un sous-e.v. de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\dim E_m = m + 1$.

(b) On considère l'application

$$L : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), y(t) \mapsto ay''(t) + by'(t) + cy(t).$$

Montrer que si γ n'est pas une solution de (12), alors $L(E_d) \subset E_d$ et $L|_{E_d}$ est un isomorphisme.

(c) En déduire, toujours sous l'hypothèse que γ n'est pas une solution de (12), qu'il existe une solution particulière de (13) dans E_d.

Solution: (a) Trivial.

(b) C'est trivial que $L(E_d) \subset E_d$. Pour montrer qu'il est isomorphism, il suffit d'observer que L préserve le degré.

(c) L'existence d'une solution particulière est un corollaire directe de (b).

Exercice 3.

Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes

(a) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = te^{-t}$

(b) $y''(t) + 4y(t) = t^2$

(c) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \sin t$.

Solution: (a) Les solutions sont

$$y(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t\right) + C_1 e^t + C_2 e^{-2t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Les solutions sont

$$y(t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}t^2 + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Les solutions sont

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos t + C_1 e^t + C_2 te^t, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

On considère l'équation

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = 0 \tag{14}$$

avec $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

(a) Réécrire l'équation (14) comme un système $x'(t) = A(t)x(t)$ d'ordre 1 en dim 2.

(b) Montrer que toute solution non identiquement nulle de (14) s'annule au plus un nombre fini de fois dans chaque intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(c) Montrer que si u_1, u_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (14) alors elles ne peuvent pas s'annuler dans un même point.

(d) Montrer que les points d'annulations de u_1 et u_2 s'alternent, c'est-à-dire u_1 s'annule exactement une fois entre deux zéros consécutifs de u_2, et vice versa.

Solution: (a) On omet.

(b) S'il y a un nombre infini de zéros, alors on prend t_0 un point d'adhérence de l'ensemble des zéros. Alors on peut montrer que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$. Par unicité, $y \equiv 0$.

(c) On peut montrer que sinon leur Wronskian $W \equiv 0$.

(d) On raisone par l'absurde et on considère $\frac{u_1}{u_2}$.

TD15.2 Semaine 15, Jeudi

Exercice 1.(Oscillateur Harmonique)

Soit $c \in \mathbb{R}, \omega, \omega_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ avec $\omega \neq \omega_0$. On considère l'équation

$$y'' + \omega_0^2 y(t) = c\sin(\omega t), t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Cette équation modélise le mouvement d'un corps attaché à un ressort élastique sous l'action d'une force période de pulsation ω, en l'absence de frottement; l'inconnue $y(t)$ représente la position du corps au moment t.

(a) Donner une solution particulière de (15).

(b) Donner toutes les solutions de (15).

(c) Montrer que si $\omega \to \omega_0$ alors $\sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| \to +\infty$ pour tout solution y de (15)(Ce phénomène est appelé la *résonance*).

Solution: (a) Une solution particulière:

$$y_p(t) = \frac{c}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

(b) Les solutions sont:

$$y = y_p + C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) On a l'estimation

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| \geq \frac{|c|}{|\omega_0^2 - \omega^2|} - \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \to +\infty.$$

Exercice 2.

Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On considère l'équation

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = g(t), \tag{16}$$

(a) Écrire l'équation (16) comme un système $x' = Ax + b$ d'ordre 1 en dimension 2.

(b) Remarquer que $A(t)$ est constante. Calculer la matrice fondamontale $R(s, t)$.

(c) Utiliser la formule générale

$$x(t) = R(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)\mathrm{d}s$$

pour donner la solution générale de (16), où g reste inconnue.

(d) Expliciter dans le cas $g(t) = e^t$. Comparer avec l'exercice 2, TD15.1.

Solution: (a) L'équation (16) est équivalent à $x' = Ax + b$ avec

$$x = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

(b) On observe que $A^2 = -\omega^2 I$, donc

$$R(t, s) = e^{(t-s)A} = \begin{pmatrix} \cos\omega(t-s) & \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-s) \\ -\omega\sin\omega(t-s) & \cos\omega(t-s) \end{pmatrix}$$

(c) et (d) On omet.

Exercice 3.

Intégrer le systèm différentiel

$$\begin{cases} x' = tx + (1-t^2)y + (1-t^2)^2, \\ y' = x - ty + t(1+t^2). \end{cases}$$

Pour cela, on se propose de vérifier que: $t \mapsto (t,1)$ et $t \mapsto (1+t^2,t)$ sont deux solutions indéprndantes du système homogène associé et d'utiliser la méthode de variation des constantes.

Solution: Les solutions sont

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1+t^2 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^4 + C_1 \\ t - t^3 + C_2 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

Soit $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et inégrable. On considère l'équation

$$y'' + (1+\theta)y = 0.$$

On suppose que $y(t)$ est une solution de cette équation définie sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$g(t) = y(t) + \int_0^t \theta(s)y(s)\sin(t-s)\mathrm{d}s.$$

(a) Vérifier que $g'' + g = 0$.

(b) En déduire qu'il existe $A \geq 0$ t.q.

$$|y(t)| \leq A + \int_0^t |\theta(s)y(s)|\mathrm{d}s.$$

(c) Montrer que y est bornée.

Solution: (a) On a

$$g' = y' + \int_0^t \theta(s)y(s)\cos(t-s)\mathrm{d}s,$$

et puis

$$g'' = y'' + \theta(t)y(t) - \int_0^t \theta(s)y(s)\sin(t-s)\mathrm{d}s,$$

donc $g'' + g = y'' + (1+\theta)y = 0$.

(b) On a $g = C_1\cos t + C_2 \sin t$ est bornée, d'où le résultat.

(c) On applique l'inégalité de Gronwall.

Exercice 5.

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable en $+\infty$. On considère l'équation

$$y'' + fy = 0. \tag{17}$$

(a) Soit y une solution bornée de (17). Montrer que $y'(t) \to 0$ en $+\infty$.

(b) Soient y_1, y_2 deux solutions de (17), te leur Wronskien

$$W : t \mapsto \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$$

Calculer W.

(c) En déduire que (17) admet une solution non-bornée.

Solution: (a) D'abord on a

$$\begin{aligned} y'(t) &= y'(1) + \int_1^t f'' \\ &= y'(1) - \int_1^t fy, \end{aligned}$$

puisque y est bornée et f est intégrable, la limite $\lim_{t \to +\infty} y'(t)$ existe. Comme y est bornée, cette limite est nécessairement 0.

(b) $W = y_2' y_1 - y_1' y_2$, donc

$$\begin{aligned} W' &= y_2'' y_1 + y_1' y_2' - (y_1' y_2' + y_2 y_1'') \\ &= y_2'' y_1 - y_1'' y_2 \\ &= -f y_2 y_1 + f y_1 y_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc W est constante.

(c) On prend deux solutions non-liées y_1, y_2. S'ils sont bornée, alors par (a), $y_1', y_2' \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, donc $W \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Par (b), on obtient que $W \equiv 0$ donc y_1, y_2 sont liées, contradiction.

Exercice 6.

Montrer que le système réel

$$\begin{cases} x' = a(t)x - b(t)y \\ y' = b(t)x + a(t)y \end{cases}$$

est équivalent à une équation différentielle linéaire complexe $z' = c(t)z$ avec $z = x + iy$. Déduire une équation différentielle linéaire pour $v(t) = |z(t)|^2$.

(a) Appliquer la conclusion pour résoudre le système

$$\begin{cases} x' = x\cos t - y\sin t \\ y' = x\sin t + y\cos t \end{cases}$$

En particulière, déterminer un système fondamental $X(t)$ avec $X(0) = I$ et calculer son Wronskian $X(t)$. Montrer que toute solution est période. Quelle est la période?

(b) Tracer l'allure pour $z(t) = (x(t), y(t))$ avec $z(0) = (1, 0)$. Déterminer $v(t) = |z(t)^2|$ et trouver deux constantes α, β t.q. $0 < \alpha \leq v(t) \leq \beta$.

Solution: La fonction $c = a + bi$ convient. Donc on a

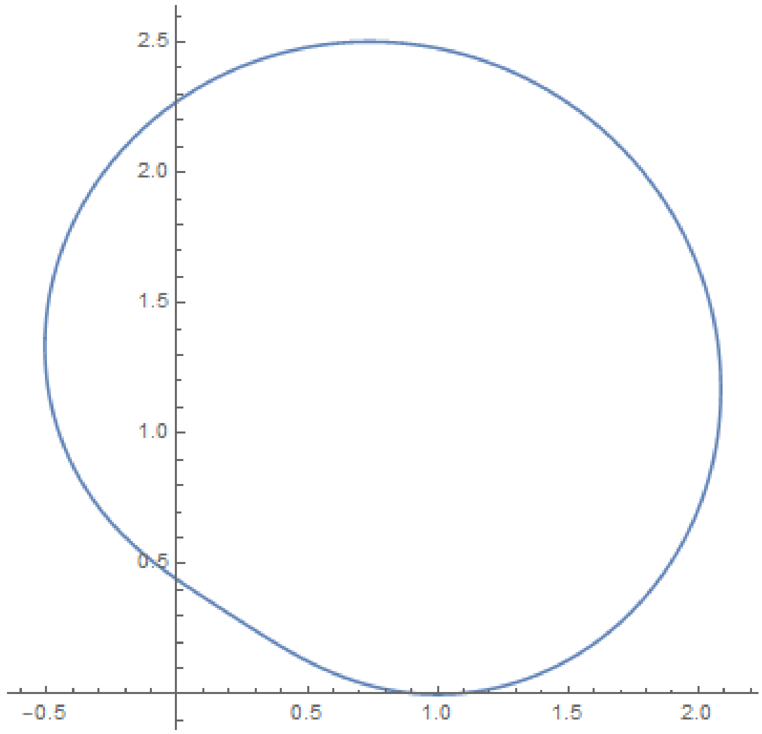
$$\begin{aligned} v' &= z'\bar{z} + \bar{z}'z \\ &= cz\bar{z} + z\bar{c}\bar{z} \\ &= 2av. \end{aligned}$$

(a) Toutes les solutions sont de période 2π.

(b) Dans ce cas, on a $v' = 2v\cos t$ donc $v = e^{2\sin t}$, donc on a

$$0 < \frac{1}{e^2} \leq v \leq e^2.$$

Voici une figure:



TD16.1 Semaine 16, Mardi

Exercice 1.

On considère le système autonome dans $\mathbb{R}^n$

$$x' = Ax \tag{18}$$

(a) Montrer que si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre réelle λ, alors $x(t) = e^{\lambda t} x_0$ est une solution de (18) telle que $x(0) = x_0$.

(b) Montrer que si $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre complexe $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, alors la fonction réelle

$$x(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) x_0 - \sin(\beta t) y_0)$$

est une solution de (18) telle que $x(0) = x_0$. (Indication: montrer que $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$, où $z(t) = e^{\lambda t} z_0 \in \mathbb{C}^n$.)

Solution: La vérification est directe.

Exercice 2.

On considère le système

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4z \\ z' = -x + 4z. \end{cases}$$

(a) Écrire ce système sous la forme $X' = AX$.

(b) Trouver les valeurs propres de A et déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de l'application représentée par A s'écrit dans la nouvelle base

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

(c) En déduire les solutions.

Solution: (a) On a simplement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) On a $\chi_A(X) = X(X-3)^2$ donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Une base:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Les solutions sont

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & e^{3t} & (t+1)e^{3t} \\ 4 & -2e^{3t} & -(2t+1)e^{3t} \\ 1 & e^{3t} & (t+2)e^{3t} \end{pmatrix} b, b \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$x' = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer e^{tA} pour $a \in \{0, 1, -4\}$.

Déterminer, selon les valeurs de a, si l'une des propriétés suivantes est vérifiée:

(b) toutes les solutions tendent vers 0 quand $t \to +\infty$.

(c) toutes les solutions sont bornées pour $t \geq 0$.

Solution: Pour $a = 0$ on a

$$e^{tA} = C^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dans ce cas, (b) et (c) ne sont pas vérifiées.

Pour $a = -4$ on a

$$e^{tA} = C^{-1} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} C, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

dans ce cas, (b) et (c) ne sont pas vérifiées.

On laisse le cas $a = 1$ comme un exercice ap'ès le cours, on remarque que dans ce cas, les trois valeurs propres de A sont $-1, \pm i$. Donc (c) est satisfaite mais (b) n'est pas.

Exercice 4.

Déterminer les équilibres pour les système

$$\left\{ x' = -xy' = y \right. \quad ; \left\{ x' = -yy' = x \right. \quad ;$$

$$\left\{ x' = 2x + yy' = -4x - 2y \right. \quad ; \left\{ x' = y + 3y' = -x - 2y - 1 \right. \quad .$$

Solution: (1) Dans ce cas, les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont ± 1, donc son point d'équilibre $(0,0)$ est instable.

(2) Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont $\pm i$, on voit que le d'équilibre $(0,0)$ est stable mais pas asymtotiquement stable.

(3) Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, mais cette matrice n'est pas nulle, donc il existe une solution non-bornée, donc son point d'équilibre $(0,0)$ est instable.

(4) Le point d'équilibre est $(-4,-3)$, on fait un changement de variable

$$\bar{x} = x + 4, \bar{y} = y + 3$$

et il suffit de considèrer l'équation linéaire avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

ses valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, donc le point d'équilibre est asymtotiquement stable.

TD16.2 Semaine 16, Jeudi

Exercice 1.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle scalaire

$$x' = \mu x - x^3 \tag{19}$$

1) Pour $\mu = 0$, trouver explicitement toutes les solutions de (19) avec $x(0) = x_0$. Montrer que 0 est l'unique équilibre de (19) et qu'il est asymptotiquement stable.

2) Pour $\mu \neq 0$, trouver tous les équilibres de l'équation (19) et déterminer s'ils sont stables, asymtotiquement stables ou instables.

3) Tracer les orbites dans les différents cas.

Solution: 1) Les solutons sont

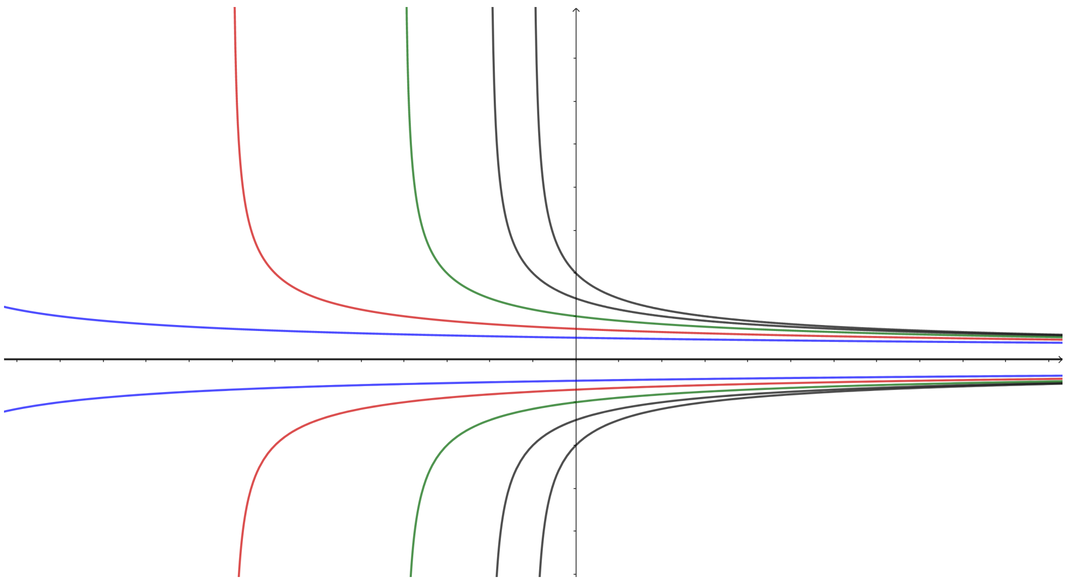
$$x(t) = \frac{\operatorname{sgn}(x_0)}{\sqrt{2t + x_0^{-2}}},$$

on voit facilement qu'il est asymptotiquement stable.

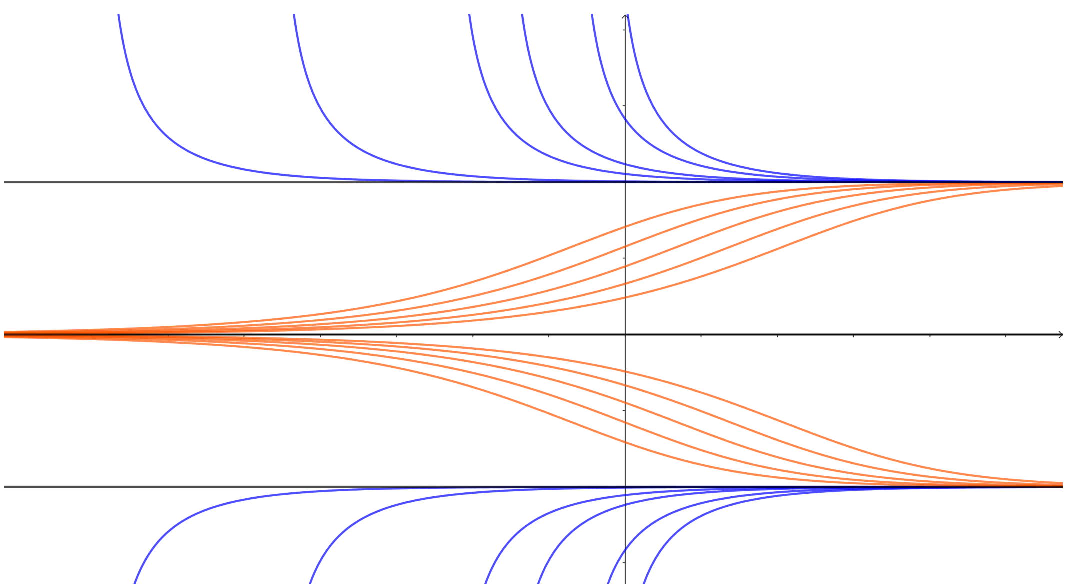
2) Si $\mu < 0$, alors 0 est l'unique équilibre de (19) et il est asymptotiquement stable.

Si $\mu > 0$, alors 0 est un équilibre instable. Les autres équilibres sont $\pm\sqrt{\mu}$, ils sont asymptotiquement stable.

3) Pour le cas $\mu = 0$, voici une figure:



Le cas $\mu < 0$ est similaire. On donne l'illustration pour $\mu = 1$:



Exercice 2.

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' = \sin(x+y) \\ y' = e^x - 1 \end{cases} \tag{20}$$

1) Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale prenant la valeur (x_0, y_0) en $t = 0$. On notera I l'intervalle maximal de définition de cette solution.

2) Montrer que pour tout $t \in I$, on a $|x(t) - x_0| \leq |t|$. En déduire que $I = \mathbb{R}$.

3) Déterminer tous les points d'équilibre de (20) et leur nature (stable,asymtotiquement stable ou instable).

Solution: 1) Cauchy-Lipschitz.

2) Sortie des compacts.

3) Les équilibres sont $(0, k\pi), k \in \mathbb{Z}$. Un calcul simple montre que l'équilibre est asymtotiquement stable si k est impaire et instable si k est paire.

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

1) Trouver tous les équilibre du système.

2) Montrer que $\hat{x}(t) = (\cos t, \sin t)$ est une solution 2π-périodique de ce système.

3) Pour toute solution $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, la quantité $\rho(t)^2 := x_1(t)^2 + x_2(t)^2$ est constante, croissante ou décroissante? Déterminer selon la valeur initiale $(x_1(0), x_2(0))$.

4) En déduire que toute solution avec $||x(0)|| < 1$ est globale. Que peut-on dire si $||x(0)|| > 1$?

5) Écrire le système en coordonnées polaires (ρ, θ).

6) Déterminer explicitement les solutions $(\rho(t), \theta(t))$.

7) Tracer l'allure des orbites dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Solution: 1) Le seul équilibre est $(0,0)$.

2) La vérification est directe.

3) Posons $z = \rho^2$, on vérifie que $z' = 2z(1-z)$. Donc

$$\rho^2 \text{ est } \begin{cases} \text{croissante,} & 0 < \rho(0)^2 < 1 \\ \text{constante,} & \rho(0)^2 = 0, 1 \\ \text{décroissante,} & \rho(0)^2 > 1 \end{cases}$$

4) Si $||x(0)|| < 1$, on raisonne par le théorème de sorti des compacts. Si $||x(0)|| > 1$, on résoudre l'équation $z' = 2z(1-z)$ et on a

$$z(t) = 1 + \frac{z_0 - 1}{z_0 - 1 - e^{2t} z_0},$$

donc la solution maximale est définie sur

$$I_{max} = \left] \frac{1}{2} \ln \frac{z_0 - 1}{z_0}, +\infty \right[.$$

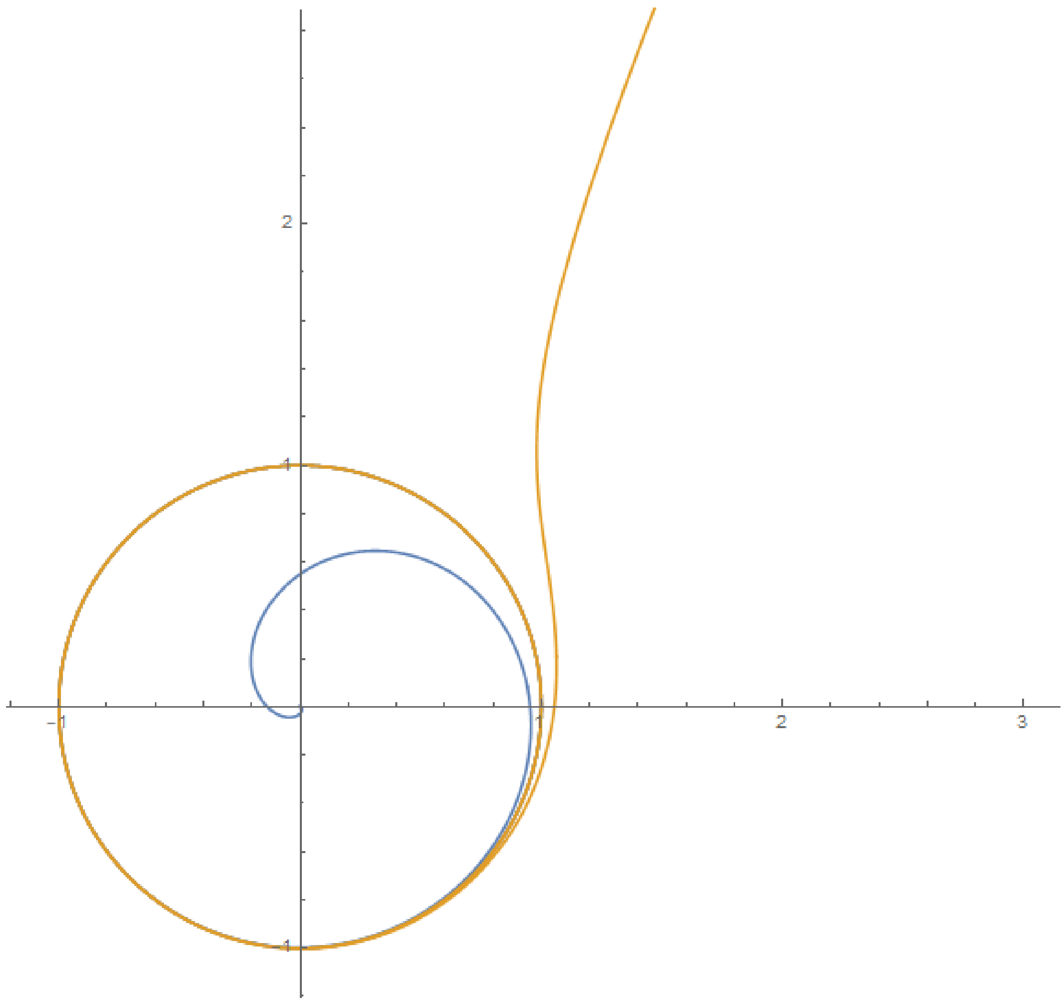
5) On a

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1 - \rho^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

6) Les solutions ont pour expression

$$\begin{cases} \rho^2 = \dfrac{e^{2t} C}{e^{2t} C - 1} \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

7) Voici l'allure:



Exercice 4.

Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' = -kx + y - x^3 \\ y' = -x \end{cases}$$

1) Montrer que $(0,0)$ est l'unique équilibre du système.

2) Écrire le système linéarisé autour de $(0,0)$.

3) En déduire, pour $k \neq 0$, si l'origine est stable, asymtotiquement stable ou instable.

4) L'origine est-elle stable si $k = 0$? Justifier votre réponse.

Solution: 1) Trivial.

2) Le système linéarisé autour de $(0, 0)$ est

$$\begin{cases} x' = -kx + y \\ y' = -x \end{cases}$$

3) On considère les valeurs propres de la matrice du système linéarisé autour de $(0, 0)$, ils sont

$$\lambda = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Donc le système est $\begin{cases} \text{asymtotiquement stable} & k > 0 \\ \text{instable} & k < 0. \end{cases}$

4) Dans le cas $k = 0$, on vérifie que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2) = 2x(y - x^3) - 2xy = -2x^4 \leq 0$$

et on en déduire que l'origine est stable.

Exercice 5.

On considère l'équation différentielle définie sur $\Omega =]0, +\infty[^2 \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = xy - x^3 \\ y' = xy - y^3 \end{cases}$$

On notera $(x(t), y(t))$ la solution maximale pour la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ définie sur $I_{(x_0,y_0)}$.

1) Montrer que si $(x_0, y_0) \in \Omega$, alors $(x(t), y(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I_{(x_0,y_0)}$.

2) Motrer qu'il existe un unique équilibres du système dans Ω.

3) Montrer que $[0, +\infty[\subset I_{(x_0, y_0)}$.

4) Montrer que l'unique équilibre est globalement aymtotiquement stable.

Solution: 1) Trivual.

2) L'unique équilibre est $(1, 1)$.

3) On observe que:

· Si $x > 1, y > 1$, alors $(x^2 + y^2)' \leq 0$;

· Si $x > 1, 0 < y < 1$, alors $x' < 0, y' > 0$;

· Si $0 < x < 1, y > 1$, alors $x' > 0, y' < 0$;

· Si $0 < x, y < 1$, alors $(xy)' > 0$.

Et puis on raisonne par le théorème de sorti des compacts.

4) Par l'observation de 3).

Exercice 6.(Équation de Newton)

On considère l'équation différentielle

$$x'' = F(x), x \in \mathbb{R} \tag{21}$$

où $F \in C^1(\mathbb{R})$. On définit les fonctions **énergie cinétique** et **énergie potentielle**

$$K(v) = \frac{1}{2}v^2, \qquad U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(s)\mathrm{d}s.$$

1) Écrire (21) comme un système pour $(x, v := x')$.

2) Montrer que les solutions constantes de (21) correspondent aux équilibre du système.

3) Montrer que l'énergie totale $E(x, v) = K(v) + U(x)$ est constante le long des solutions de (21).

4) Soit x_0 un point de minimum strict pour $U(x)$. Montrer que (x_0) est stable mais pas asymtotiquement stable.

Solution: 1) et 2) On omet.

3) On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = vv' - F(x)x' = x'x'' - x'F(x) = 0.$$

4) On vérifie que E est une fonction de Lyapunov, donc le point est stable. Pour voir qu'il n'est pas asymtotiquement stable, il suffit d'utiliser la conservation de l'energie montrée dans 3).

L'examen Oral II et Préparation d'examen Final

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de i.i.d. de loi de Cauchy de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$. Montrer que la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi, exprimer la loi limite.

Indication: Utiliser

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{x} - o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } \infty.$$

Solution: Pour $x \leq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq x) &\leq \mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq 0) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq 0) = 2^{-n} \to 0.
\end{aligned}$$

Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq x, M_n > 0) &= \mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{n}{x}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < \frac{n}{x}\right) \\
&= 1 - \left(\int_{-\infty}^{\frac{n}{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)}\right)^n \\
&= 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\arctan\frac{n}{x} + \frac{\pi}{2}\right)^n \\
&= 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\pi - \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to 1 - \exp\left(-\frac{x}{\pi}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(nM_n^{-1} \le x) \to 1 - \exp\left(-\frac{x}{\pi}\right),$$

donc la loi limite est la loi exponentielle de paramètre π^{-1}.

Exercice 2.

L'intervalle $[0,1]$ est partitionné en n intervalles disjoints de longueur $p_1, \cdots, p_n$, on définie l'entropie de cette partition par

$$h = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, et soit $Z_m(i)$ le nombre des $X_j, 1 \le j \le m$ qui est dans le i-ème intervalle dans la partition ci-dessus. Montrer que

$$R_m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{Z_m(i)}$$

satisfait $m^{-1}\log R_m \to -h$ lorsque $m \to \infty$.

Solution: Posons $I_{i,j}$ la fonction caractéristique pour l'événement: x_j est dans le i-ième intervalle. Alors

$$\begin{aligned}
\log R_m &= \sum_{i=1}^{n} Z_m(i) \log p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} I_{i,j}\right) \log p_i \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} I_{i,j} \log p_i\right)
\end{aligned}$$

Posons

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n} I_{i,j} \log p_i,$$

on a

$$\mathbb{E}(Y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i = -h.$$

Par théorème des grands nombres, on obtient que $m^{-1}\log R_m \to -h$ lorsque $m \to \infty$.

Exercice 3.

Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels à valeurs dans $]0,1[$ telle que $np_n \to \theta > 0$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. telle que $\mathbb{P}_{X_n} = \mathcal{B}(n, p_n)$ (loi binomiale) et X une v.a. de loi de Poisson de paramètre θ. Montrer que $X_n \to X$ en loi.

Solution 1: On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{(np_n)^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{n-k} \\
&\to \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = \mathbb{P}(X = k).
\end{aligned}$$

Solution 2: On a

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{itX_n}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} e^{itk} \\
&= (1 - p_n + p_n e^{it})^n \\
&= \left(1 - \frac{np_n(1-e^{it})}{n}\right)^n \\
&\to e^{\theta(e^{it}-1)}
\end{aligned}$$

Et on a

$$\Phi_X(t) = \sum_{k\geq 0} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} e^{itk} = e^{\theta(e^{it}-1)}.$$

Exercice 4.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Analyser le comportement asymptotique en loi de la suite

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} X_k.$$

Solution: $\Phi(t) = \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\Phi_{Y_n}(t) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(itY_n\right)\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{it\sqrt{k}X_k}{n}\right)\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \exp(-\frac{kt^2}{2n^2}) \\
&= \exp\left(-\frac{n+1}{4n}t^2\right) \\
&\to \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

donc Y_n converge en loi vers $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de i.i.d. de loi de Bernoulli avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = p \in]0,1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$. On considère la marche aléatoire $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec $Z_0 = 0$. On note $A_n = \{Z_n = 0\}$.

(a) Que représente l'événement $\limsup_{n\to\infty} A_n$?

(b) Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Indication : Utiliser la formule de Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Solution: (a) Cet événement représente que $Z_n = 0$ pour un nombre infini de n.

(b) On observe que $\mathbb{P}(A_{2m+1}) = 0$ et

$$\mathbb{P}(A_{2m}) = \binom{2m}{m} p^m (1-p)^m.$$

Par lemme de Borel-Cantelli, il suffit de montrer que

$$\sum_{m\geq 1} \binom{2m}{m} p^m (1-p)^m < \infty.$$

Par la formule de Stirling on obtient que

$$\binom{2m}{m} \sim \frac{4^m}{\sqrt{\pi m}},$$

donc il suffit de montrer que

$$\sum_{m\geq 1} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}(4p(1-p))^m < \infty,$$

c'est trivial car $4p(1-p) \in]0,1[$.

Exercice 6.(Système prédateur-proies de Lotka-Volterra)

Soit $a, b, \alpha, \beta > 0$. On considère le système

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -\alpha y + \beta xy \end{cases}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$. Soit $]t_-, t_+[$ l'intervalle de solution maximale.

1) Montrer que pour tout $t \in]t_-, t_+[$, on a $x(t) > 0, y(t) > 0$.

2) Montrer que

$$H(x,y) := \beta x + by - a\ln x - \alpha \ln y$$

est stable le long de chaque solution.

3) Montrer que la solution est globale.

4) Déterminer les équilibres avec $x > 0, y > 0$.

5) On divise le quadrant en 4 parties en utilisant la droite horizontale et la droite verticale passant l'équilibre. Faire un dessin du champ de vecteurs associé au système.

6) Montrer qu'une solution non-constante doit forcément passer toutes les 4 parties.

7) Montrer que les solutions sont périodiques.

8) Soit ω la période. Calculer les moyennes

$$\frac{1}{\omega}\int_u^{u+\omega} x(s)\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega}\int_u^{u+\omega} y(s)\mathrm{d}s$$

pour $u \in \mathbb{R}$.

9) Si x_0 ou y_0 n'est pas positif, la solution est-elle périodique?

Solution: 1) Par l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.

2) La vérification est directe.

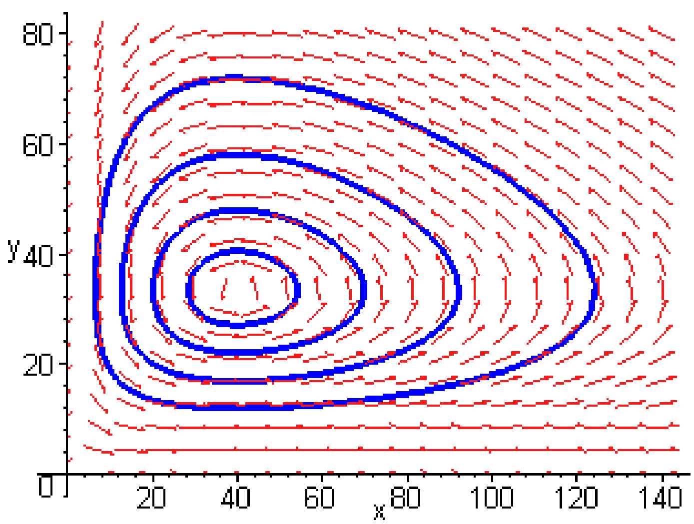
3) D'après 2), on obtient que

$$\frac{e^{x\beta}}{x^{\alpha}}\frac{e^{yb}}{y^{a}} \equiv C.$$

On en déduire que $e^{yb}y^{-a}$ est bornée supérieurement car $e^{x\beta}x^{-\alpha}$ est bornée inférieurement, donc y est bornée. Similairement, x est born'ee, donc on conclut par sorti des compacts.

4) L'unique tel équilibre est $(\alpha\beta^{-1}, ab^{-1})$.

5) Voisi un dessin



6) On omet.

7) Il suffit de montrer qu'il existe $t_1 \neq t_2$ t.q. $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$. Puisque toutes solutions doit passer pour un nombre infini de fois le droit $y = ab^{-1}$, il suffit de

remarquer que pour tout C, il n'existe qu'un nombre fini de x t.q.

$$H\left(x, \frac{a}{b}\right) = C.$$

8) On calcul:

$$(\ln x)' = \frac{x'}{x} = a - by,$$

donc

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{u}^{u+\omega} x(s)\mathrm{d}s = \frac{a}{b}.$$

Similairement, on a

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_{u}^{u+\omega} y(s)\mathrm{d}s = \frac{\alpha}{\beta}.$$

9) La réponse est négative. Sans perte de généralité, on suppose que $x_0 < 0$.

Si $y_0 > 0$, alors comme 1) on peut montrer que $x(t) < 0, y(t) > 0$, alors on a

$$y' = -\alpha y + \beta xy < 0,$$

donc la solution n'est pas périodique.

Si $y_0 < 0$, alors comme 1) on peut montrer que $x(t) < 0, y(t) < 0$, alors on a

$$x' = ax - bxy < 0,$$

donc la solution n'est pas périodique.

Si $y_0 = 0$, alors $y \equiv 0, x(t) = Ce^{at}$, elle n'est pas périodique.

Remarque: L'équation de Lotka-Volterra est developée pour décrire la dynamique des systèmes biologicales, dont on étudie un cas spécial d'une telle interaction: il existe exactement deux espèces: l'un, les prédateurs, mange l'autre, les proies.

Exercice 7.(Équation de Riccati)

Soit l'équation différentielle $x' = t^2 + x^2$ et $\phi : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation.

1) Montrer que ϕ est croissante.

2) Montrer que s'il existe t_0 t.q. $\phi(t_0) > 0$ alors I est majoré.

3) Montrer que s'il existe t_0 t.q. $\phi(t_0) < 0$ alors I est minoré.

4) Montrer que I est borné est $\phi(I) = \mathbb{R}$.

5) Montrer qu'il existe une seule solution maximale impaire de l'équation différentielle.

6) Posons

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \phi(s)\mathrm{d}s,$$

montrer que $f(t) := e^{-\Phi(t)}$ est une solution de l'équation $x'' + t^2 x = 0$. Quel est le domaine de définition des solutions maximales de cette équation?

7) Trouver des équivalent de ϕ aux extrémités de I.

8) Montrer que f s'annule aux extrémités de I.

9) Si f est une solution maximale de $x'' + t^2 x = 0$, montrer que si t_- et t_+ sont 2 zéros consécutifs de f alors $-\dfrac{f'}{f}$ est une solution maximale de l'q́uation de Riccati sur $]t_-, t_+[$.

Solution: 1) $\phi' = t^2 + \phi^2 \geq 0$.

2) On a

$$\left(-\frac{1}{\phi}\right)' = \frac{\phi'}{\phi^2} = 1 + \frac{t^2}{\phi^2} \geq 1,$$

donc pour tout $t > t_0$, on a

$$0 > -\frac{1}{\phi(t)} \geq (t - t_0) - \frac{1}{\phi(t_0)} \implies t < t_0 + \frac{1}{\phi(t_0)}.$$

3) Similaire que 2).

4) Si I n'est pas borné, par 2) et 3), sans perte de généralité, on peut supposer que

$\phi(t) \geq 0$ et I n'est pas minoré. Alors, pour tout $t < 0$, on a

$$\begin{aligned}\phi(0) &\geq \phi(0) - \phi(t) \\ &= \int_t^0 \phi'(s)\mathrm{d}s \\ &\geq \int_t^0 s^2 \mathrm{d}s = -\frac{t^3}{3}\end{aligned}$$

on obtient une contradiction lorsque $t \to -\infty$.

Par sorti des compacts, $\phi(I) = \mathbb{R}$.

5) Par l'unicité de solution, $\phi(t)$ et $-\phi(-t)$ coincident, I et $-I$ coincident aussi.

6) La vérification est simple.

On peut montrer que toutes les solutions voulues sont globales en utilisant le théorème 1.13 de référence 2.

7) Soit $I =]a, b[$, alors en a et b, on a

$$\left(-\frac{1}{\phi}\right)' = \frac{\phi'}{\phi^2} = 1 + \frac{t^2}{\phi^2} = 1 + o(1),$$

donc on a

$$\left(-\frac{1}{\phi}\right)' \sim t - a \text{ ou } t - b,$$

donc

$$\phi(t) \sim \frac{1}{a-t} \text{ ou } \frac{1}{b-t}.$$

8) C'est évident.

9) On vérifie facilement que c'est une solution. Pour voir qu'elle est maximale, on suppose sans perte de généralité que $f > 0$ sur $]t_-, t_+[$, on a alors $f'' \leq 0$ donc f' est décroissante. On peut montrer que

$$\frac{f'}{f}(]t_-, t_+[) = \mathbb{R}$$

donc cette solution est maximale.