MÉMOIRE DE MODAL: GÉOMÉTRIE DES SURFACES TROPICALES

Sous la direction du Prof. Omid AMINI

29 novembre 2024

Moaad ELMoutassim, Ziying MAI, Huaizhen YAO, Xiaowei YE

INTRODUCTION

Dans cet article, on va parler de la géométrie tropicale, un sujet assez récent et actif. On va essayer de généraliser les résultats sur les graphes métriques en dimension supérieure.

Pour donner des notions avec lesquelles on travaille, on va introduire les définitions de Cartwright [Car15 ; Car19 ; Car21] dans Section 1. On a effectué des modifications pour simplifier au niveau de technique.

Dans Section 2 on parle de variété tropicale immergée, on va montrer une condition d'équilibre pour les diviseurs (Théorème 2.3).

Dans la Section 3, on va généraliser le concept de diviseur, et on va définir intersection de deux diviseurs sur une surface. On va établir différentes versions du principe de maximum (Théorème 3.22 et 3.25).

Dans Section 4 on va introduire différentes notions du rang, et on a étabir une relation entre certains d'eux (Théorème 4.10) à partir de la version tropicale d'un théorème de Radon (Théorème 4.15), une autre démonstration peut être trouvée dans [FJP23].

Dans Section 5 on rajoute des remarques ainsi que les problème ouverts, notamment la conjecture de Riemann-Roch (Subsection 5.2) et d'ensemble rang-déterminant fini (Subsection 5.3), afin de donner un apercu sur les enjeux d'aujourd'hui.

TABLE DES MATIÈRES

1 Complexe tropical **4**
- 1.1 Définition Générale . . . 4
- 1.2 Fonction PL . . . 5
- 1.3 Subdivision . . . 6

2 Le cas d'une variété tropicale immergé **7**

3 Diviseurs et intersection **9**
- 3.1 Somme formelle . . . 9
- 3.2 Diviseurs et intersection . . . 10
- 3.3 Principe de maximum . . . 12

4 Les notions de dimension et rang **15**
- 4.1 Rang d'évitement . . . 15
- 4.2 Rang tropical et rang générateur . . . 16
- 4.3 Théorème de Radon tropical . . . 17

5 Remarques et Problèmes ouverts **21**
- 5.1 Remarques . . . 21
- 5.2 Conjecture de Riemann-Roch . . . 21
- 5.3 Ensemble rang-déterminant . . . 22

Références **23**

1 COMPLEXE TROPICAL

Dans cette première section, on va parler de complexes tropicaux. Cette conception, introduite par Cartwright [Car15 ; Car19 ; Car21], donne un cadre assez général pour la géométrie tropicale.

Dans toutes les géométries, l'étude d'une certaine famille de fonctions est toujours un sujet important. Par exemple, les fonctions lisses pour la géométrie différentielle, les fonctions holomorphes ou méromorphes pour la géométrie complexe et les fonctions rationnelles pour la géométrie algébrique. Dans la géométrie tropicale, on s'intéresse aux fonctions PL, que l'on définira dans cette section.

On va aussi introduire la construction de subdivision, ce qui rend l'intuition un concept rigoureux de mathématiques.

1.1 Définition Générale

Afin de donner la définition d'un complexe tropical, on a besoin du concept de Δ-complexe. Notons

$$\Delta_n := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in [0,1], \forall i \in \{1,2,\cdots,n\}; \sum_{i=1}^{n} x_i \in [0,1]\}.$$

Définition 1.1 (Δ-complexe)**.** *Un Δ-complexe de dimension n est un espace topologique X muni d'une famille finie d'application continue $(\varphi_i : \Delta_n \to X)_{i \in I}$ telle que*

- *Pour tout $i \in I$, $\varphi_i : \Delta_n \to \varphi_i(\Delta_n)$ est un homéomorphisme.*
- *Les images de φ_i couvre X.*
- *Pour $i \neq j$, $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_i(\Delta_n) \cap \varphi_j(\Delta_n))$ est une face de $\varphi_\alpha(\Delta_n)$ pour tout $\alpha \in \{i,j\}$.*

Ici on a identifier une copie de Δ_n avec l'image $\varphi_i(\Delta_n)$, l'image de toute face de Δ_n sous certain φ_i est appelée une simplexe *de Δ. Les simplexes de dimension 0, 1, $(n-1)$, et n d'un Δ-complexe S de dimension n sont appelées ses* sommets*,* arrêtes*,* ridges*, et* facets*, respectivement.*

Définition 1.2 (complexe tropical faible)**.** *Un* complexe tropical faible de dimension n Δ *est une paire (S, α), où S est un Δ-complexe de dimension n qui est connexe, et α est une fonction qui envoie toute paire (v, r), formée par un sommet v de S et un ridge r contenant v, à une valeur $\alpha(v, r) \in \mathbb{Z}$ telle que pour tout ridge r,*

$$\sum_{v \in r_0} \alpha(v, r) = \deg r, \tag{1}$$

où r_0 est l'ensemble des sommets de r et $\deg r$ est le nombre de simplexes de dimension n contenant r. Les valeurs $\alpha(v, r)$ sont appelés les constantes de structure *du complexe tropical faible.*

Définition 1.3. *Soient Δ un complexe tropical faible et q une simplexe de dimension $(n-2)$ de Δ, la* matrice d'intersection locale *de Δ en q est la matrice symétrique M_q dont les lignes et les colones sont indexées par les ridges r contenant q, et les coefficients sont donnés par :*

$$(M_q)_{r,r'} = \begin{cases} \#\{\textit{facets contenant } r \textit{ et } r'\} & \textit{si } r \neq r' \\ -\alpha(v, r) & \textit{si } r = r', \end{cases}$$

où v est le spmmet de r oppsé à q. Un complexe tropical *est un complexe tropical faible Δ telle que la matrice d'intersection locale M_q admet exactement une valeur propre positive pour toute simplexe q de dimension $(n-2)$ de Δ.*

1.2 Fonction PL

Pour un facet f de Δ, on peut l'identifier avec la simplexe standard dans $\mathbb{R}^n$, qui est l'enveloppe convexe de l'origine et les n vecteurs de coordonné. Telle identification est unique à une permutation des sommets près. We peut donc définir un *polyhèdre de dimension* $(n-1)$ dans Δ comme un polyhèdre de dimension $(n-1)$ dans un facet f de Δ, qui est défini par des inéqualités linéaires avec coefficients rationnels et constantes réelles, sous l'identification ci-dessus.

Définition 1.4 (fonction PL)**.** *Une* fonction PL *(abréviation pour* piecewise linear *en anglais) sur un complexe tropical faible Δ est une fonction continue ϕ dont la réstriction sur chaque simplexe de Δ est linéaire par morceaux avec pentes intègres, sous l'identification de cette simplexe avec la simplexe standard dans $\mathbb{R}^k$.*

Exemple 1.5. *L'exemple de complexe tropical faible est la simplexe standard. Voyons ci-dessous le cas de dimension 2 représenté Figure 1.5, avec les sommets $v_1 = (0,0)$, $v_2 = (0,1)$ et $v_3 = (1,0)$. On pose les constantes de structure $\alpha(v_2, e_1) = 0, \alpha(v_3, e_1) = 1, \alpha(v_2, e_3) = \alpha(v_3, e_2) = 2$ et $\alpha(v_1, e_2) = \alpha(v_1, e_3) = -1$.*

La fonction affine déterminée par $f(v_1) = 1$ et $f(v_2) = f(v_3) = 0$ est une fonction PL sur cette complexe. □

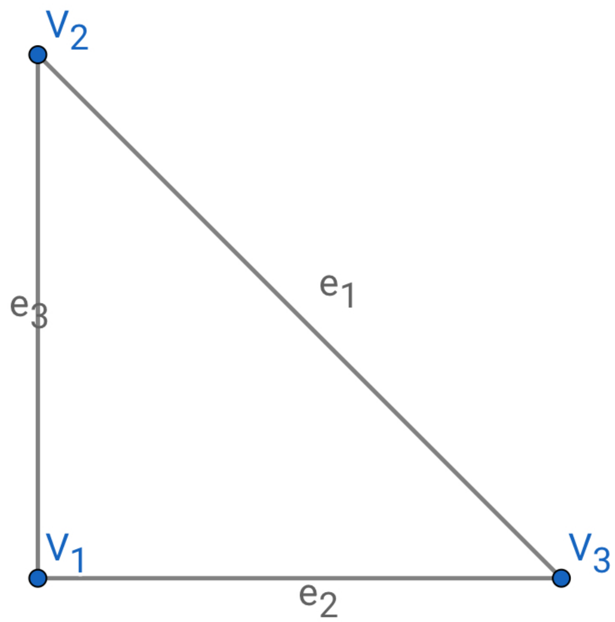

Figure 1 – La simplexe standard de $\mathbb{R}^2$

Exemple 1.6. *Prenons cette fois l'exemple d'un graphe simple, où chaque arrêt est identifié avec l'intervalle $[0,1]$. Les constantes de structure est juste leurs degrés, cela rend ce graphe un complexe tropical faible de dimension 1.*

Puisqu'il n'y a pas de matrice d'intersection locale, ce complexe n'est jamais forte. Mais les constantes de structure sont positives, cela va nous dire quelque chose (Voir Théorème 3.22). □

1.3 Subdivision

Construction 1.7 (subdivision)**.** *On définit la* subdivision d'ordre m *d'un complexe tropical faible* Δ *comme le complexe* Δ' *obtenu de manière suivante :*

on remplace chaque simplexe de Δ *par une subdivision unimodulaire intègre de la simplexe standard multiplié par* m*, muni des constantes de structure suivantes :*

Si r' *est un ridge de* Δ' *intersectant l'intérieur d'un facet de* Δ*, notons* $v'_1, \ldots, v'_n$ *les sommets de* r'*, et* w_1, w_2 *les sommets opposés à* r' *des deux facets contenant* r'*. Alors le milieu de* w_1 *et* w_2 *vit dans l'espace affine engendré par* r'*. On peut donc écrire :*

$$\frac{w_1 + w_2}{2} = c_1 v'_1 + \cdots + c_n v'_n$$

où $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{Q}$ *avec* $c_1 + \cdots + c_n = 1$*. On pose* $\alpha(v'_i, r') = 2c_i$*.*

Si r' *est un ridge de* Δ' *contenu dans un ridge* r *de* Δ *qui a pour degree* d*. On représente les points de chaque facet de* Δ *contenant* r *par* $(n+1)$ *coordonnés non-négatifs qui ont pour somme totale* m*. Dans le* i*-ième tel facet, l'unique facet de* Δ' *contenant* r' *est l'enveloppe convexe de* r' *et un seul point, dont le coordonné est* $(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}, 1)$*, par unimodularité. Pareil, les points de* r *sont de coordonés consistant de* n *nombres réels positifs et pour somme* m*. Dans tels coordonnés, on représente le* i*-ième sommet* v'_i *de* r' *par le vecteur* $(y_{i,1}, \ldots, y_{i,n})$*. Finalement, si* $v_1, \ldots, v_n$ *sont des sommerts de* r*, on détermine les constantes de structure de* r' *par l'équation :*

$$\begin{pmatrix} \alpha(v'_1, r') \\ \vdots \\ \alpha(v'_n, r') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{1,n} & \cdots & y_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha(v_1, r) + x_{1,1} + \cdots + x_{d,1} \\ \vdots \\ \alpha(v_n, r) + x_{1,n} + \cdots + x_{d,n} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

□

Proposition 1.8. *La subdivision dans Construction 1.7 donne un complexe tropical faible.*

Démonstration: Il faut démontrer que $\alpha(v', r')$ dans Construction 1.7 est intégrale et vérifie (1) pour chaque ridge. On prend les mêmes notations dans Construction 1.7 et on considère d'abord un ridge r' intersectant l'intérieur d'un facet Δ. Les coordonnés de $(w_1 + w_2)/2$ seront des nombres demi-entiers, don c_i l'est aussi et $\alpha(v'_i, r') = 2c_i$ est entier. De plus, la somme de $\alpha(v'_i, r')$ égale à 2, qui est le degré de r' dans Δ'.

Maintenant on considère un ridge r' dans la subdivision Δ' qui est dans un ridge r de Δ. Les vecteurs $v'_1, \ldots, v'_n$ forment les sommets d'un simplexe d'une triangulation unimodulaire, donc les différences entre les paires des vecteurs $(y_{i,1}, \ldots, y_{i,n})$ sont intègres. De plus, chaque vecteur satisfait l'équation linéaire affine $y_{i,1} + \cdots + y_{i,n} = m$, donc le sous-groupe engendré par ces vecteurs est formé par les vecteurs dont la somme est un multiple de m. Ainsi, pour vérifier que les coefficients définis en (2) sont entiers, il suffit de vérifier que la somme des entrées du vecteur du côté droit de (2) est un multiple de m. En fait, on a $\alpha(v_1, r) + \cdots + \alpha(v_n, r) = d$ et $x_{i,1} + \cdots + x_{i,n} = m - 1$, donc la somme totale est dm. De plus, cela implique que $\alpha(v'_1, r') + \cdots \alpha(v'_n, r') = d$, ce qui complète la preuve. □

Proposition 1.9. *Soit* Δ' *une subdivision d'ordre* m *d'un complexe tropical faible* Δ*, soit* ϕ *sur* Δ *est une fonction PL, alors* $m\phi$ *est PL sur* Δ'*.*

Démonstration: $m\phi$ sur Δ' est linéaire sur chauqe simplexe et a des pentes entières. □

Théorème 1.10. *Une subdivision* Δ' *d'une complexe tropicale* Δ *est encore un complexe tropical.*

Définition 1.11. *On munit l'ensemble de tous les complexes tropicaux faibles avec la relation d'équivalence engendrée par les relations* $\Delta \sim \Delta'$ *dès que* Δ' *est une subdivision de* Δ*. Une classe d'équivalence est appelée une* variété tropicale.

De plus, on muni l'ensemble de toutes les paires (Δ, f)*, où* Δ *est un complexe tropical faible et* f *est une fonction PL sur* Δ*, avec la relation d'équivalence engendrée par les relations* $(\Delta, f) \sim (\Delta', mf)$ *où* Δ' *est une subdivision d'ordre* m *de* Δ*. Une classe d'équivalence est appelée une* fonction méromorphe *sur une variété tropicale.*

2
LE CAS D'UNE VARIÉTÉ TROPICALE IMMERGÉ

Dans cette section, on considère une Δ-complexe $X \subset \mathbb{R}^k$ de dimension n chaque simplexe est un polytope de $\mathbb{R}^k$ définie par des inégalités affines avec pentes intègres et on oublie les constantes de structures.

Définition 2.1 (espace tangent)**.** *Soit s une simplexe de X, on note*

$$T(s) := \{c(x-y) : c \in \mathbb{R}, (x,y) \in s^2\}$$

l'espace tangent *de s et $T_{\mathbb{Z}}(s) := T(s) \cap \mathbb{Z}^k$.*

On obtient que $T_{\mathbb{Z}}(s)$ est un groupe libre abélien de rang $\dim s$, et que $s_1 \subset s_2$ implique $T(s_1) \subset T(s_2)$ et $T_{\mathbb{Z}}(s_1) \subset T_{\mathbb{Z}}(s_2)$, de plus, $T_{\mathbb{Z}}(s_2)/T_{\mathbb{Z}}(s_1)$ est groupe libre abélien de rang $\dim s_2 - \dim s_1$.

Définition 2.2. *Une* structure tropicale *sur X est une paire d'application : la première application m, appelée* l'application de poids*, envoie chaque facet à un nombre entier ; et la deuxième application v, envoie chaque paire (f,r) avec f un facet et r un ridge telle que $r \subset f$, à un vecteur $v(f,r) \in \mathbb{Z}^k$ qui vérifier les conditions suivantes :*

- *$v(f,r)$ pointe vers l'intérieur de f depuis r ;*
- *l'image de $v(f,r)$ dans $T_{\mathbb{Z}}(f)/T_{\mathbb{Z}}(r)$ est génératrice ;*
- *la* condition d'équilibre *suivante soit satisfaite pour tout ridge r :*

$$\sum_{r \subset f} m(f)v(f,r) = 0.$$

Soit $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la restriction sur chaque simplexe est linéaire de pentes intègre, on peut définir *l'ordre d'annulation* de F le long d'un ridge r comme :

$$ord_r(F) := -\sum_{f \supset r} m(f)F_f(v(f,r)),$$

où F_f est la forme linéaire induite par $F|_f$.

Théorème 2.3. *Si $m \equiv 1$, alors sur le skeleton de dimension $n-1$ de X muni de l'application de poids $r \mapsto ord_r(F)$, on peut construire une application e qui envoie chaque paire (r,t), où r est un facet (donc ridge de X) et t un ridge (donc simplexe de X de dimension $n-2$), à un vecteur $e(r,t) \in \mathbb{Z}^k$, qui donne lieu à une structure tropicale.*

Démonstration: Soit t une simplexe de X de dimension $n-2$. On remplace F avec $F - F_t$, on travaille localement, et on quotiente l'espace par $T(t)$, on se ramène donc au cas où X est de dimension 2 et $t = 0$. On va montrer dans ce cas que

$$\sum_{r \supset t} ord_r(F)e(r,t) = 0.$$

On a déjà la condition d'équilibre

$$\forall r, \qquad \sum_{f \supset \tau} v(f,r) = 0. \tag{3}$$

Considérons une paire $f \supset r$ et notons r' l'autre ridge de f qui contient t. On peut écrire

$$b_{r,r'}v(f,r) = e(r',t) + a_{r,r'}e(r,t)$$

avec une unique paire d'intègres $a_{r,r'}$ et $b_{r,r'}$ et $b_{r,r'} \neq 0$. On peut donc réécrire l'équation (3) comme

$$\sum_{r' \sim r} \frac{1}{b_{r,r'}} e(r',t) = -\left(\sum_{r' \sim r} \frac{a_{r,r'}}{b_{r,r'}}\right) e(r,t),$$

où $r' \sim r$ signifie que r' et r sont dans le même facet . On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{r\supset t} ord_r(f)e(r,t) &= -\sum_{r\supset t}\sum_{f\supset r} F_f(v(f,r))e_r \\
&= -\sum_{r\supset t}\sum_{r'\sim r} F_f\Big(\frac{e(r,t)}{b_{r,r'}} + \frac{a_{r,r'}e(r,t)}{b_{r,r'}}\Big)e(r,t) && (\text{avec } f = r\vee r') \\
&= -\sum_{r\supset t}\sum_{r'\sim r} \frac{F_{r'}(e(r',t))}{b_{r,r'}}e(r,t) - \sum_{r\supset t}\sum_{r'\sim r}\frac{F_r(e(r,t))a_{r,r'}}{b_{r,r'}}e(r,t) && (F_f|_r = F_r \text{ pour } \sigma\supset\tau) \\
&= -\sum_{r\supset t}\sum_{r'\sim r} \frac{F_{r'}(e(r',t))}{b_{r,r'}}e(r,t) + \sum_{r\supset t} F_r(e(r,t))\Big(-\sum_{r'\sim r}\frac{a_{r,r'}}{b_{r,r'}}\Big)e(r,t) \\
&= -\sum_{r\supset t}\sum_{r'\sim r} \frac{F_{r'}(e(r',t))}{b_{r,r'}}e(r,t) + \sum_{r\supset t} F_r(e(r,t))\sum_{r'\sim r}\frac{1}{b_{r,r'}}e(r',t) \\
&= -\sum_{r\supset t}\sum_{r'\sim r} \frac{F_{r'}(e(r',t))}{b_{r,r'}}e(r,t) + \sum_{r\supset t}\sum_{r'\sim r}\frac{F_r(e(r,t))}{b_{r,r'}}e(r',t) = 0.
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, il faut observer que $b_{r,r'} = b_{r',r}$, les deux termes représentent tous les deux le co-volume du sous-réseaux de $T_{\mathbb{Z}}(f)$ engendré par $e(r,t)$ and $e(r',t)$. □

La condition d'équilibre qu'on a vue en cours pour les courbes tropicales planes peuvent être vues comme un cas particuliers de la version "infinie" ce théorème si on muni $\mathbb{R}^k$ avec une structure tropicale bien choisie, et le résultat généralise bien aux dimensions supérieures, ainsi qu'aux autres objects tropicaux, par exemple les éventails tropicaux [AP21 ; AP23].

3
DIVISEURS ET INTERSECTION

3.1 Somme formelle

Soit X une variété tropicale. On considère des sommes formelles finies de polyhèdre de dimension $n-1$ de X à coefficients intègres dans cette section, où un *polyhèdre* de X est une simplexe d'un représentant de X.

Deux telles sommes sont dites *équivalentes* si elles diffèrent par un élément dans le sous-groupe engendré par l'ensemble des sommes $[P]-[Q_1]-\cdots[Q_r]$, où P est un polyhèdre de dimension $(n-1)$, et $Q_1,\cdots,Q_r$ sont des polyhèdres qui donnent une subdivision de P.

À une équivalence près, on peut supposer toutes les termes sont simplexes d'une même complexe sous-jacente, et donc l'intersection de deux termes quelconques dans une somme formelle est une face commune de dimension inférieure à $n-1$.

Lemme 3.1. *Soient $Z=\sum a_i[T_i]$ et $Z'=\sum a_i'[T_i']$ des sommes formelles équivalents sur une variété tropicale.*

1. *Supposons que les coefficients a a_i' de Z' sont positifs, alors les coefficients a_i de Z sont positifs.*
2. *Si les coefficients a_i et a_i' sont strictement positifs, alors $\bigcup P_i=\bigcup P_i'$.*

Démonstration: Montrons d'abord la première assertion. Par définition, la différence $Z-Z'$ est une somme finie d'expressions de la forme $[P]-[Q_1]-\cdots-[Q_r]$, où $P=Q_1\cup\ldots\cup Q_r$, et les intersections $Q_i\cap Q_j$ sont des faces propres de chacun. On peut supposer que p n'est contenu dans aucune facette des polyèdres apparaissant dans ces expressions ou facette du T_i.Par conséquent, si p est dans le polyèdre P de l'une de ces expressions, alors p est dans exactement l'un des Q_i correspondants. Par conséquent, l'équivalence entre Z et Z' ne change pas la somme des coefficients des polyèdres contenant p, ce qui signifie que :

$$\sum_{P_i\ni p} a_i=\sum_{P_i'\ni p} a_i'. \tag{4}$$

Puisque les coefficients a_i' sont positifs, le côté droit de (4) est positif. Par notre hypothèse sur Z, le côté gauche est constitué du seul coefficient a_j, qui est donc non positif.

Deuxièmement, supposons que les coefficients a_i et a_i' sont positifs. Encore une fois, que p soit un point dans un terme T_j de Z, tel que p n'est contenu dans aucun ridge des polyèdres apparaissant dans l'équivalence entre Z et Z', et nous avons à nouveau l'égalité (4). Le côté gauche de (4) est strictement positif puisque $p\in T_j$, donc p doit aussi être contenu dans un terme T_k' de Z'. Puisque nous avons choisi p dans un sous-ensemble ouvert dense de $\bigcup P_i$, et que l'union $\bigcup P_i'$ est fermée, nous avons une inclusion $\bigcup P_i\subset\bigcup P_i'$. Par symétrie, on a l'inclusion inverse, et donc l'égalité. ☐

Définition 3.2. *Une classe d'équivalence de sommes formelles de polyèdres est dite* positive *si elle contient une somme formelle dont tous les coefficients sont positifs.*

Lemme 3.1(1) montre que la définition précédente est indépendante du représentant choisi, tandis que Lemme 3.1(2) montre que la définition suivante est indépendante du représentant choisi.

Définition 3.3. *Le* support *d'une classe d'équivalence positive de sommes formelles est l'union des polyèdres dans un représentant à coefficients strictement positifs.*

Par exemple, si nous considérons P comme un polyèdre à $(n-1)$-dimensions et Q comme un polyèdre à (n - 1) dimensions correctement contenu dans P , alors $[P]-[Q]$ est effectif, même s'il n'est pas écrit avec des coefficients positifs, et son support est $P\setminus Q^o$, où Q^o désigne l'intérieur relatif de Q. On peut trouver une subdivision $P=Q\cup Q_2\cup\cdots\cup Q_r$, comme dans la relation d'équivalence, et alors $[P]-[Q]$ est équivalent à $[Q_2]+\cdots+[Q_r]$, qui a des coefficients positifs, montrant ainsi que $[P]-[Q]$ est effectif, et son support est $P\setminus Q^o$, comme on l'affirme.

3.2 Diviseurs et intersection

À une équivalence près, on peut considérer une fonction méromorphe sur une variété tropicale comme une fonction PL sur un complexe tropical telle que la restriction sur toute simplexe est linéaire.

Définition 3.4. *Soit (Δ, f) un représentant d'une fonction sur une variété tropicale telle que f est linéaire sur chaque simplexe de Δ. On définit* le diviseur de f *comme*

$$\operatorname{div}_\Delta(f) = \sum_{r \text{ ridge}} \left(\sum_{v \sim r} f(v) - \sum_{v \in r} \alpha(v, r) f(v) \right) [r],$$

où $v \sim r$ signifie que v et le sommet opposé à r dans un facet qui contient r.

Lemme 3.5. *Le diviseur d'une fonction est bien une somme formelle à coefficients entiers.*

Démonstration: Grâce à la condition sur les constantes de structure 1, quitte à ajouter une constante, on peut supposer que f prend des valeurs entières. Les coefficients sont donc évidemment entiers. □

Exemple 3.6. *Reprenons l'exemple 1.6 de dimension 1, dans ce cas on a*

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{v} \left(\sum_{w \sim v} f(w) - \deg(v) f(v) \right) [v],$$

on retrouve donc le diviseur défini en cours. □

Lemme 3.7. *Soit Δ' une subdivision de Δ d'ordre m, alors $\operatorname{div}_\Delta(f) = \operatorname{div}_{\Delta'}(mf)$. Le diviseur est donc indépedant du choix de représentant.*

Démonstration: On reprend les notations de Construction 1.7, et on distingue deux cas :

D'abord, si r' est un ridge intersectant l'interieur d'un facet de Δ, alors dans $\operatorname{div}_\Delta(f)$, son coefficient est nul. Et dans $\operatorname{div}_{\Delta'}(mf)$, son coefficient est

$$f(w_1) + f(w_2) - \sum_{i=1}^{n} 2c_i v'_i = 0.$$

Et si r' est inclu dans un ridge r de Δ, on calcul son coefficient dans $\operatorname{div}_{\Delta'}(mf)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{d} mf(w'_j) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(v'_k, r') mf(v'_k) \\
&= \sum_{j=1}^{d} f(w_j) + \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \sum_{j=1}^{d} x_{j,i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha(v'_i, r') mf(v'_i) \\
&= \sum_{j=1}^{d} f(w_j) + \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \sum_{j=1}^{d} x_{j,i} - \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha(v'_k, r') y_{k,i} f(v_i) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{d} f(w_j) + \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \sum_{j=1}^{d} x_{j,i} - \left(\sum_{i=1}^{n} f(v_i) \sum_{k=1}^{n} \alpha(v'_k, r') y_{k,i} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{d} f(w_j) - \sum_{i=1}^{n} \alpha(v_i, r) f(v_i)
\end{aligned}$$

d'après l'équation (2). □

Définition 3.8. *Une fonction est dite linéaire si son diviseur est trivial, i. e.* $\text{div}(f) = 0$.

Corollaire 3.9. *Soit Δ' une subdivision d'ordre m d'un complexe tropical faible Δ, alors (Δ, ϕ) représente une fonction linéaire si et seulement si $(\Delta', m\phi)$ représente une fonction linéaire.*

À partir de maintenant, on se restrainte dans le cas de dimension 2.

Définition 3.10. *Soient Z une somme formelle de segment et Q un sommet d'un terme de Z. Soit ϕ une fonction PL sur un voisinage de Q. Notons a_i* la pente de ϕ le long de P_i *et m_i est la multiplicité de P_i dans Z, alors on définit* la multiplicité de ϕ le long de Q de Z *comme :*

$$\text{mult}_{Z,Q}(\phi) = \sum a_i m_i.$$

On dit que Z est équilibrée *si tout sommet Q d'un terme de Z vérifie* $\text{mult}_{Z,Q}(\phi) = 0$ *pour toute fonction linéaire ϕ dans un voisinage de Q.*

Lemme 3.11. *Soit Z et Z' des sommes formelles équivalentes, alors Z est équilibrée si et seulement si Z' l'est.*

Démonstration: Supposons d'abord que Z' est équilibrée. On peut supposer que Z' est une subdivision de Z. Tout sommet Q de Z est donc encore sommet de Z', donc la condition d'équilibre est encore vérifiée.

Réciproquement, si Z est équilibrée, alors pour tout sommet Q' de Z', il y a deux cas : Lee premier cas, où Q' aussi un sommet de Z, est trivial avec le même argument que si-dessus.

Dans le second cas, où Q' est contenu dans l'intérieur d'un segment P de Z, Q' est contenu dans exactement deux terme, P_1' and P_2' de Z' et les pentes sortantes vont s'annuler. □

Définition 3.12. *Sur une surface tropicale X, un* diviseur *D est une classe d'équivalence de sommes formelles de segments telle que D est localement définie par une fonction PL, au sens où il existe un recouvrement ouvert $U_1, \cdots, U_m$ de X et des fonctions PL ϕ_i sur U_i telles que $D|_{U_i} = \text{div}(\phi_i)$ pour chaque i.*

Définition 3.13 (produit d'intersection)**.** *Soit D un diviseur sur une surface tropicale avec représentant Δ et C une somme formelle de segments. Par définition, il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$de Δ tel que sur chaque $\{U_i\}$, le diviseur D est défini par une fonction PL ϕ_i. On définit* le produit d'intersection $D \cdot C$ *comme suivant : dans chaque U_i, on a la restriction*

$$(D \cdot C)|_{U_i} = \sum_{p \in U_i \cap C} \text{mult}_{p,C}(\phi_i)[p]. \tag{5}$$

Proposition 3.14. *Le produit d'intersection entre les diviseurs sur une surface tropicale est symétrique.*

Démonstration: Soient C et D deux diviseurs et fixons un point p dans leur intersection. Soient ϕ et ψ les fonctions définissant respectivement C et D dans un voisinage de p. Il suffit de montrer que

$$\text{mult}_{p,C}(\psi) = \text{mult}_{p,D}(\phi).$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\text{mult}_{p,C}(\psi) &= \sum_{v \sim p} (\psi(v) - \psi(p)) \left(\sum_{w \sim [vp]} \phi(w) - \alpha(v, [vp]\phi(v) - \alpha(p, [vp])\phi(p)) \right) \\
&= \sum_{v \sim p} (\psi(v) - \psi(p)) \left(\sum_{w \sim [vp]} (\phi(w) - \phi(p)) - \alpha(v, [vp](\phi(v) - \phi(p)) \right) \\
&=^t \vec{\psi} M_p \vec{\phi},
\end{aligned}$$

où $\vec{\psi} = (\psi(v) - \psi(p))_{v \sim p}$ et $\vec{\phi} = (\phi(v) - \phi(p))_{v \sim p}$. De même, on a

$$\text{mult}_{p,D}(\phi) =^t \vec{\phi} M_p \vec{\psi},$$

donc $\text{mult}_{p,C}(\psi) = \text{mult}_{p,D}(\phi)$ car M_p est symétrique.

□

Proposition 3.15 (condition d'équilibre)**.** *Un diviseur est équilibrée.*

Démonstration: Corollaire de Proposition 3.14. □

Remarque 3.16. *L'intersection $D \cdot C$ est une somme formelle intègre de points bien définie.*

Démonstration: *D'abord, la somme donnée en (5) est finie : Soit ϕ_i l'une des fonctions PL définissant D. Alors, en tout point p à l'intérieur d'un segment C et à l'intérieur d'un domaine de linéarité de ϕ_i, il y aura deux pentes sortantes à partir de p, qui s'annuleront. Puisque C a un nombre fini de segments et que ϕ_i a un nombre fini de domaines de linéarité, cela montre que sur chacun des ensembles ouverts U_i, la somme (5) a un nombre fini de termes non nuls, et donc $D \cdot C$ est une somme formelle finie.*

Il y a trois choix dans la définition : premièrement, les ensembles ouverts U_i ; deuxièmement, pour les fonctions de définition locales ; troisièmement, le choix de la subdivision afin de définir la multiplicité comme en 3.13. Comme le diviseur d'une fonction PL est une condition locale, en raffiniant les U_i et en remplacant les fonctions de définition par leurs restrictions sans changer l'intersection, le premier choix n'affecte pas le résultat.

Maintenant on calcule avec le même ensemble ouvert, et on considère ϕ_i et ϕ_i' les fonctions de définition locale pour D. Alors leur différence $\phi_i - \phi_i'$ a un diviseur trivial sur chaque U_i, ce qui signifie que $\phi_i - \phi_i'$ est une fonction linéaire. Par la condition d'équilibre 3.15, $\mathrm{mult}_{p,C}((\phi_i - \phi_i')) = 0$ pour tous les points $p \in C$, et donc $\mathrm{mult}_{p,C}(\phi_i) = \mathrm{mult}_{p,C}(\phi_i')$. Ainsi, $D \cdot C$ est bien défini.

Troisièmement, la multiplicité est indépendante du choix d'une somme formelle de polyèdres dans la classe d'équivalence C. □

□

Définition 3.17. *Deux diviseurs D et D' sur un surface tropicale sont linéairement équivalents si $D - D' = \mathrm{div}(\phi)$ pour ϕ une fonction PL.*

Lemme 3.18. *Soit Δ' une subdivision d'ordre m d'un complexe tropical faible Δ. Alors une somme formelle de polyèdres est un diviseur sur Δ si et seulement si elle est un diviseur sur Δ'.*

Démonstration: Corollaire du Lemme 3.11.

□

Lemme 3.19. *Soit Δ' une subdivision d'ordre m d'un complexe tropical faible Δ, et soit chaque arête de Δ contenue dans une facette. Alors, les diviseurs sur Δ sont linéairement équivalents si et seulement s'ils sont linéairement équivalents sur Δ' .*

Démonstration: On applique Lemme 3.7. □

Définition 3.20. *On dit qu'un diviseur de Cartier D sur une variété tropicale X est algébriquement trivial s'il existe un recouvrement ouvert $U_1, \dots, U_m$ et des fonctions PL ϕ_i sur U_i telles que $D|_{U_i} = \mathrm{div}(\phi_i)$ et que la différence $\phi_i|_{U_i \cap U_j} - \phi_j|_{U_i \cap U_j}$ est localement constante pour chaque paire i et j. Deux diviseurs sont* algébriquement équivalents *si leur différence est algébriquement triviale.*

Proposition 3.21. *Si D et D' sont des diviseurs de Cartier algébriquement équivalents sur une variété tropicale, et que C est une somme formelle, alors $\deg D \cdot C = \deg D' \cdot C$.*

Démonstration: Par la linéarité du produit d'intersection, il suffit de montrer que le degré de $D \cdot C$ est nul pour D un diviseur algébriquement trivial. Il existe alors des fonctions de définition locales de D dont les différences sont localement constantes. On peut subdiviser C en segments tels que les fonctions de définition de D sont linéaires à l'intérieur de chaque segment. La multiplicité de D en un point p est, par définition, la somme des pentes sortantes de ces fonctions le long des segments contenant p. Cependant, comme les équations de définition diffèrent par des fonctions localement constantes, les pentes sortantes aux extrémités opposées d'un segment s'annulent, ce qui fait que le degré total de $D \cdot C$ est 0. □

3.3 Principe de maximum

Le but de cette partie est de généraliser le principe de maximum dans notre cadre.

Théorème 3.22 (principe de maximum I)**.** *Soit (Δ, f) une fonction méromorphe sur une variété tropicale dont le diviseur est positif, on suppose en outre que les constantes de structure $\alpha(v, r)$ sont positives, alors f est constante.*

Définition 3.23. *On dit que deux facets F et F' de Δ sont connecté s'il existe une suite de facets*

$$F_0 = F, F_1, \cdots, F_m = F'$$

telle que F_i et F_{i+1} partage un ridge comme face commune. Le fait d'être connecté est évidemment une relation d'équivalence, l'union de tous les facets dans une classe d'équivalence est appelée un component connexe par contact*.*

On se ramème à démontrer que f est constante sur chaque component connexe par contact. On suppose donc que X est connexe par contact.

Lemme 3.24. *Soit r un ridge dont la somme*

$$S(r) := \sum_{v \in r} f(v)$$

est maximale, alors f est constante tous les facets contenant r.

Démonstration: Notons $v_1, v_2, \cdots, v_n$ les sommets de r et $w_1, \cdots, w_l$ les sommets opposés à r dans les facets $F_1, \cdots, F_l$. Puisque la somme $S(r)$ est maximale, un raisonnement par l'absurde donne

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \forall j \in \{1, \cdots, l\}, f(v_i) \geq f(w_j).$$

Par définition du diviseur d'une fonction, on a le coefficiet de r dans $\mathrm{div}(f)$:

$$\sum_{j=1}^{l} f(w_j) - \sum_{i=1}^{n} \alpha(v_i, r) f(v_i) \leq 0,$$

donc toutes les inégalités sont saturées, les $f(v_i)$ et $f(w_j)$ sont égaux, ce qui donne le résultat. □

Démonstration: [du Théorème 3.22.] Appliquer Lemme 3.24 dans chaque component connexe par contact, on peut donc montrer par récurrence que f est constante sur tout component connexe par contact, d'où le résultat. □

Dans [Car15], Cartwright a déomntré une autre version de principe de maximum en dimension 2 pour le cas de dimension 2, dont l'hypothèse est que la complexe tropicale soit forte.

Théorème 3.25 (principe de maximum II, c. f. Proposition 2.11 de [Car15])**.** *Soit (Δ, f) une fonction méromorphe sur une surface tropicale dont le diviseur est positif, on suppose en outre que la complexe tropicale sous-jacente est forte, et que pour tout point p sur la surface, il existe un voisinage U de p tel que $U \setminus \{p\}$ est connexe, alors f est constante.*

Démonstration: Soit p un sommet où f atteint son maximum. On choisit un nombre c suffisamment grand, tel que toutes les entrées de $M_p + cI$ soient non négatives, où I est la matrice identité.

Définition 3.26. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* irréductible au sens de Perron-Frobenius *s'il n'existe pas de sous-ensemble $J \subset \{1, \cdots, n\}$ non vide et propre J tel que les entrées $M_{i,j}$ soient nulles pour tout $i \in J$ et $j \notin J$.*

Notre matrice M_p est irreductible au sens de Perron-Frobenius par l'hypothèse sur la connexité du voisinage. (Un tel ensemble J pour M_p correspondrait à une composante connexe non triviale dans $\mathrm{link}_\Sigma(p)$, ce qui contredirait l'hypothèse de connexité locale.)

Par conséquent, selon le théorème de Perron-Frobenius 3.27, $M_p + cI$ a un unique vecteur propre w, avec des entrées strictement positives, dont la valeur propre λ a une norme maximale parmi toutes les valeurs propres de $M_p + cI$. Ainsi, w est un vecteur propre de M_p avec pour valeur propre $\lambda - c$, qui est plus grande que toutes les autres valeurs propres de M_p.

Étant donné que Δ est une surface tropicale,On a M_p a une unique valeur propre positive, et donc $\lambda - c$ doit être cette valeur propre positive. Soit maintenant x le vecteur contenant les pentes sortantes de f en p. Alors, $M_p x$ contient les coefficients du diviseur de f dans un voisinage de p, et nous avons supposé que ces coefficients sont positifs.

Toutes les entrées de w sont positives, et donc

$$w^T M_{p,\Sigma} x = (\lambda - c) w^T x$$

est positif, et comme $\lambda - c$ est strictement positif, les entrées de $w^T x$ sont également positives.

Par ailleurs, f est maximale en p, donc les entrées de x sont negatives, et la seule façon pour $w^T x$ d'être positif est que x soit nul. Ainsi, f est constante dans un voisinage de p.

Ainsi l'ensemble des points où la fonction f atteint son maximum est un ouvert, et il est fermé par continuité de f, ainsi f doit être constant. □

Théorème 3.27. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ irréductible au sens de Perron-Frobenius telle que toutes les entrées sont positives, alors il existe une valeur propre $\lambda > 0$, qui est la plus grande en module parmi toutes les valeurs propres de A. De plus, il existe un vecteur propre $v \in \mathbb{R}^n$ associé à λ tel que toutes ses entrées sont strictement positives.*

Démonstration: On va admettre ce théorème, veuillez consulter [BP94] (notamment Théorèmes 2.1.1(b) et 2.1.3(b)) pour des détails. □

Exemple 3.28 (contre-exemple de principe de maximum en général)**.** *Considérons la fonction dans l'exemple 1.5. Dans ce cas, on a*

$$\operatorname{div}(f) = e_1 + e_2 + e_3$$

est bien positif mais f n'est pas constante. □

4
LES NOTIONS DE DIMENSION ET RANG

4.1 Rang d'évitement

Soit D un diviseur sur une variété tropicale.

Définition 4.1. $\mathcal{M}(D) := \{f \in PL(X) : \mathrm{div}(f) + D \geq 0\}$.

Définition 4.2. *On dit qu'un point $p \in \Delta$ est* rationnel *si ses coordonnées sont rationnelles lorsque nous identifions un k-simplex contenant p avec un simplexe unitaire standard dans $\mathbb{R}^k$. Nous définissons $h^0(\Delta, D)$ comme le cardinal m du plus petit ensemble de points rationnels $\{p_1, \cdots, p_m\}$ tel qu'il n'existe pas de diviseur positif D' linéairement équivalent à D tel que le support de D' contienne $p_1, \cdots, p_m$. S'il n'existe pas un tel ensemble fini de points, alors $h^0(\Delta, D)$ est défini comme étant ∞.*

La condition de rationalité sur les points dans la Définition 4.2 est nécessaire pour des raisons techniques.

Dans le cas d'un complexe tropical unidimensionnel Γ, $h^0(\Gamma, D)$ est essentiellement la même que le rang du diviseur tel qu'introduit en cours, à l'exception du fait que notre convention diffère de la leur de 1.

Proposition 4.3. *Soit Γ est une variété tropicale uni-dimensionnelle et $r(D)$ est le rang d'un diviseur D comme en cours, alors $h^0(D) = r(D) + 1$.*

Démonstration: Rappelons que le rang de D est le plus grand nombre r tel que pour tout r point $p_1, \ldots, p_r$ dans Γ, la différence $D - [p_1] - \ldots - [p_r]$ est linéairement équivalente à un diviseur effectif D'.

Ainsi, $D' + [p_1] + \ldots + [p_r]$ est un diviseur effectif linéairement équivalent à D et il contient clairement les p_i, donc $h^0(D) \geq r(D) + 1$.

Pour montrer l'inégalité inverse, nous supposons qu'il existe des points $p_1, \ldots, p_{r(D)+1}$ tels que D n'est pas linéairement équivalent à $D' + [p_1] + \cdots + [p_{r(D)+1}]$ pour tout diviseur effectif D'.

En d'autres termes, si on écrit $|D|$ pour le sous-ensemble de Γ^d qui sont des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D, alors $|D|$ n'intersecte pas le sous-ensemble :

$$\{p_1\} \times \cdots \times \{p_{r(D)+1}\} \times \Gamma \times \cdots \times \Gamma \subset \Gamma^d.$$

Cependant, $|D|$ est un sous-ensemble fermé ([MZ08] Thm. 6.2). Par conséquent, puisque Γ n'est pas un point, nous pouvons perturber légèrement les points p_i et l'intersection avec $|D|$ sera toujours vide. En particulier, nous pouvons rendre les points p_i distincts et rationnels. Ainsi, $h^0(D) \leq r(D) + 1$, on a donc prouvé la proposition. □

Il y a certaines propriétés du rang qui se généralisent, par exemple :

Proposition 4.4. $h^0(D_1 + D_2) \geq h^0(D_1) + h^0(D_2) - 1$.

Démonstration: $h^0(D) - 1$ est le nombre maximal m tel que pour m points rationnels $p_1, \cdots, p_m$ arbitraires, il existe $D' \in \mathcal{D}$ tel que son support contient tous ces points. On a donc

$$h^0(D_1 + D_2) - 1 \geq h^0(D_1) - 1 + h^0(D_2) - 1$$

en cosidérant deux tels ensemble pour D_1 et D_2 respectivement ainsi que leur union. □

4.2 Rang tropical et rang générateur

Définition 4.5 (dépendence linéaire)**.** *Un ensemble $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ de fonction PL sur un complexe tropical est dit liéairement dépendant s'il existe des constantes $c_1, \cdots, c_n$ tels que dans la somme tropicale*

$$\bigoplus_{i=1}^{n}(c_i \otimes f_i)$$

le mininum est atteind au moins deux fois en tout point.

Définition 4.6 (famille génératrice)**.** *Un ensemble $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ de fonction PL sur un complexe tropical est dit générateur si pour tout fonction PL f, il existe des constantes $c_1, \cdots, c_n$ tels que*

$$f = \bigoplus_{i=1}^{n}(c_i \otimes f_i)$$

Définition 4.7 (rang tropical et rang générateur)**.** *Le* rang tropical *est défini comme le cardinal maximal d'ensemble linéairement indépendent. Le* rang générateur *est défini comme le cardinal minimal d'ensemble générateur. Notons respectivement r_{trop} et $r_{géné}$*

Théorème 4.8 (certificat d'indépendence)**.** *Un ensemble fini $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset PL$ est linéairement indépendant si et seulement s'il existe des nombres réels $b_1, \ldots, b_n$ tels que chaque $\varphi_i + b_i$ atteint le minimum de manière unique à un certain $v_i \in \Gamma$. Telles constantes b_i est appelé* un certificat d'indépendance*.*

Démonstration: Tout d'abord, supposons que les $\{\psi_i\}$ sont dépendantes et nous montrons que telles b_i n'existe pas. Puisque les $\{\psi_i\}$ sont dépendantes, on peut prendre des coefficients réels c'_i tels que le minimum de $\{\psi_i + c'_i\}$ est atteind au moins deux fois en chaque point $v \in \Gamma$.

Considérons maintenant une combinaison linéaire tropicale arbitraire $\theta = \min\{\psi_i + c_i\}$. Choisir $j \in I$ de telle sorte que $c_j - c'_j$ soit maximale. Pour chaque $v \in \Gamma$, il existe un $i \neq j$ tel que $\psi_i(v) + c'_i \leq \psi_j(v) + c'_j$. Il s'ensuit que $\psi_i(v) + c_i \leq \psi_j(v) + c_j$, et donc $\psi_j + c_j$ ne prend jamais le minimum de manière unique.

Il reste à montrer que si telles b_i n'existent pas, alors $\{\psi_i\}$ est dépendante.

Soit A_i l'ensemble des vecteurs $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\psi_i(v) + c_i \geq \min_{j \neq i}\{\psi_j(v) + c_j\}$ pour tout $v \in \Gamma$, c'est-à dire l'ensemble où $\psi_i + c_i$ n'est nulle part l'unique minimum.

Notons que chaque A_i est fermé, et que c donne un certificat d'indépendance si et seulement s'il n'est contenu dans aucun des A_i. De même, $\min(\psi_i + c_i)$ est atteind deux fois partout si et seulement si c est contenue dans tous les A_i. Il faut donc montrer que si les ensembles A_i couvrent $\mathbb{R}^n$, alors leur intersection est non vide.

Supposons que $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \mathbb{R}^n$. Choisir m suffisamment grand pour que $\psi_i(v) + m > \psi_j(v)$ pour tout i et j et tout $v \in \Gamma$. Soit Δ le simplexe qui a pour sommets par mn fois les vecteurs de base standard dans $\mathbb{R}^n$.

Si c est dans la face propre $\Delta_I \subset \Delta$ correspondant à $I \subset \{1, \ldots, n\}$, alors $c_i > m$ pour tout $i \in I$ et $c_j = 0$ pour $j \notin I$. Par conséquent, Δ_I est couvert par $\{A_i \cap \Delta\}_{i \in I}$.

Le lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (c'est-à-dire la variante de recouvrement d'ensembles du théorème de Brouwer sur le point fixe) dit alors que $A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap \Delta$ est non vide, comme il se doit. □

Théorème 4.9 (lemme de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz)**.** *Soit Δ_m une m-simplexe, notons $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ ses sommets. Pour chaque sommet $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, soit $C_i \subset \Delta_m$ un ensemble fermé tel que : pour tout sous-ensemble $I_k \subseteq \{1, \ldots, m\}$, la face de Δ^m engendrée par les sommets $\{e_i \mid i \in I_k\}$ est contenue dans l'union des ensembles $\bigcup_{i \in I_k} C_i$. Alors, l'intersection des ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_m$ est non vide :*

$$\bigcap_{i=1}^{m} C_i \neq \emptyset.$$

Démonstration: Veuillez consulter [KY94] pour une démonstration d'un théorème encore plus fort, appelé Théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-Shapley. □

Théorème 4.10. *Le rang tropical est inférieur ou égale au rang générateur.*

Démonstration: Soit $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$ un ensemble générateur minimal, il faut montrer que $m+1$ fonction PL forment focément un ensemble linéairement dépendant. Soit $f_1, \cdots, f_{m+1}$ des fonctions PL. Comsidérons l'application surjective $\bar{\mathbb{R}}^m \to \mathcal{M}(D)$, $(x_1, \cdots) \mapsto \oplus(x_i \otimes \varphi_i)$, soient $v_1, v_2, \cdots, v_{m+1}$ les pré-images de $f_1, \cdots, f_{m+1}$. Il suffit de montrer qu'il existe deux ensemble non-vides disjoints $I, J \subset \{1, \cdots, m+1\}$ et des constantes $(a_i, b_j)_{i \in I, j \in J}$ tel que

$$\bigoplus_{i \in I}(a_i \otimes v_i) = \bigoplus_{j \in J}(b_i \otimes v_j).$$

Dans [AGG08], c'est appelé l'indépendence au sens de Gondran-Minoux, on va démontrer ce résultat dans la partie suivante, en suivant (et modifiant) la démonstration dans [BH04]. □

4.3 Théorème de Radon tropical

On commence par le thérème de Radon classique.

Théorème 4.11 (théorème de Radon classique)**.** *Soit $S \subset \bar{\mathbb{R}}^n$ un ensemble contenant au moins $n+2$ points, alors il existe une partition non-triviale $S = A_1 \sqcup A_2$ telle que les enveloppe convexe de A_1 et A_2 s'intersectent :*

$$Conv(A_1) \cap Conv(A_2) \neq \varnothing.$$

Démonstration: Notons $S = \{s_1, \cdots, s_{n+2}, \cdots\}$.

Puisque les $n+1$ vecteurs $s_2 - s_1, \cdots, s_{n+2} - s_1$ sont forcément dépendants, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2} \in \mathbb{R}$ qui ne sont pas tous nuls, tels que

$$\sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i x_i = 0, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0.$$

Divisons l'ensemble des indices $\{1, 2, \ldots, n+2\}$ en deux sous-ensembles :

$$I_1 = \{i \mid \alpha_i > 0\}, \quad I_2 = \{i \mid \alpha_i \leq 0\}.$$

et posons les deux sous-ensembles de S comme suit :

$$A_1 = \{s_i \mid i \in I_1\}, \quad A_2 = \{s_i \mid i \in I_2\}.$$

On va maintenant construire un point commun de $Conv(A_1)$ et $Conv(A_2)$, posons

$$y_1 = \frac{\sum\limits_{i \in I_1} \alpha_i s_i}{\sum\limits_{i \in I_1} \alpha_i}, \quad y_2 = \frac{\sum\limits_{i \in I_2} |\alpha_i| s_i}{\sum\limits_{i \in I_2} |\alpha_i|}.$$

Les points y_1 et y_2 sont des combinaisons convexes respectivement des points de A_1 et de A_2, donc

$$y_1 \in Conv(A_1), \quad y_2 \in Conv(A_2).$$

Il reste à montrer que $y_1 = y_2$. En utilisant la relation d'équilibre $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \alpha_i s_i = 0$, on a :

$$\sum_{i \in I_1} \alpha_i s_i + \sum_{i \in I_2} \alpha_i s_i = 0.$$

En divisant par $\sum\limits_{i \in I_1} \alpha_i = -\sum\limits_{i \in I_2} |\alpha_i|$, on obtient donc que $y_1 = y_2$. Ainsi, $y_1 \in \operatorname{conv}(X_1) \cap \operatorname{conv}(X_2)$, ce qui prouve que les enveloppes convexes des deux sous-ensembles s'intersectent. □

Dans la suite, on va interpréter l'enveloppe convexe tropical comme une limite de certaine manière des enveloppes convexes classiques, et puis en déduire une version tropicale du théorème de Radon à partir de la version classique, ce résultat va nous permettre de montrer Théorème 4.10.

Posons $\varphi_r(x) := \exp(-rx)$ et $\Phi_r(x_1, \cdots, x_n) = (\varphi_r(x_1), \cdots, \varphi_r(x_n))$. Notons pour tout ensemble fini $A \subset \bar{\mathbb{R}}^n$

$$Conv^r(A) := \Phi_r^{-1}(Conv(\Phi_r(A)))$$

son r-*enveloppe convexe* et on considère leur limite au sens de Kuratowski-Painlevé, définie comme suivante

$$Conv^\infty(A) := \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{k \geq 0} Conv^{n+k}(A)},$$

c'est l'ensemble des points p dont il existe une suite $p_k \in Conv^k(A)$ ayant pour point d'adhérence p.

Théorème 4.12 (enveloppe convexe tropical)**.** *Pour tout ensemble fini $A \subset \bar{\mathbb{R}}^n_+$, on a*

$$Conv^\infty(A) = \{\bigoplus_{x \in A}(t_x \otimes x) : \min_{x \in A} t_x = 0\}.$$

Cet ensemble est donc appelé l'enveloppe convexe tropical *de A.*

Démonstration: On montre d'abord que

$$Conv^\infty(A) \supset \{\bigoplus_{x \in A}(t_x \otimes x : \min_{x \in A} t_x = 0\}.$$

Suppose que

$$y_\infty = \bigoplus_{x \in A}(t_x \otimes x), \quad \min_{x \in A} t_x = 0,$$

et posons

$$y_r^{(k)} = -\frac{1}{r} \ln \left(\frac{\sum_{x \in A} \exp(-r(t_x + x^{(k)}))}{\sum_{x \in A} \exp(-rt_x)} \right),$$

on peut vériefier que $y_r \in Conv^r(A)$ et que $y_r \to y_\infty$ lorsque r tend vers ∞ :

$$\lim_{r \to \infty} -\frac{1}{r} \ln \left(\frac{\sum_{x \in A} \exp(-r(t_x + x^{(k)}))}{\sum_{x \in A} \exp(-rt_x)} \right) = \min_{x \in A}(x^{(k)} + t_x).$$

Montrons l'inclusion inverse ! Supposons qu'une sous-suite de (y_r) converge vers y_∞, et que

$$y_r^{(k)} = -\frac{1}{r} \ln \left(\frac{\sum_{x \in A} \exp(-r(t_{x,r} + x^{(k)}))}{\sum_{x \in A} \exp(-rt_{x,r})} \right)$$

où les coefficients $t_{x,r}$ satisfaient

$$-\frac{1}{r} \ln \left(\sum_{x \in A} \exp(-rt_{x,r}) \right) = 0.$$

Alors $((t_{x,r})_{x \in A})_r$ est une suite dans $[1, \infty]^A$, qui est compact dans $\bar{\mathbb{R}}^n_+$, on peut extraire une sous-suite convergeante, notons la limite $(t_x)_{x \in A}$.

Lemme 4.13. *On a en fait*

$$\min_{x \in A} t_x = \lim_{r_k \to \infty} -\frac{1}{r} \ln \left(\sum_{x \in A} \exp(-rt_{x,r}) \right) = 0.$$

Démonstration: On a par un calcul

$$\begin{aligned}\min_{x\in A} t_{x,r} &= -\frac{1}{r}\ln\exp(-r\min_{x\in A} t_{x,r})\\ &\geq -\frac{1}{r}\ln\left(\sum_{x\in A}\exp(-rt_{x,r})\right)\\ &\geq -\frac{1}{r}\ln(|A|\exp(-r\min_{x\in A} t_{x,r}))\\ &= \min_{x\in A} t_{x,r} - \frac{\ln(|A|)}{r},\end{aligned}$$

donc on en déduit que

$$\min_{x\in A} t_x = \lim_{r\to\inf}\min_{x\in A} t_{x,r} = \lim_{r_k\to\infty} -\frac{1}{r}\ln\left(\sum_{x\in A}\exp(-rt_{x,r})\right) = 0.$$

□

Il reste à montrer que y_{r_k} tend vers

$$\bigoplus_{x\in A}(t_x\otimes x),$$

c'est assuré par le lemme suivant :

Lemme 4.14. *Soit $(a_x)_{x\in A}$ avec $a_x > 0$, alors on a*

$$\lim_{r\to\infty} -\frac{1}{r}\ln\left(\sum_{x\in A}\exp(-r(t_{x,r}+a_x))\right) = \min_{x\in A}(a_x+t_x).$$

Démonstration: Avec la même raisonnement que Lemme 4.13, on a

$$\min_{x\in A}(a_x+t_{x,r}) \geq -\frac{1}{r}\ln\left(\sum_{x\in A}\exp(-r(t_{x,r}+a_x))\right) \geq \min_{x\in A}(a_x+t_{x,r}) - \frac{|A|}{r}$$

et donc

$$\min_{x\in A}(a_x+t_x) = \lim_{r\to\infty}\min_{x\in A}(a_x+t_{x,r}) = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{r}\ln\left(\sum_{x\in A}\exp(-r(t_{x,r}+a_x))\right).$$

□

□

Théorème 4.15 (théorème de Radon tropical)**.** *Soit $S\subset\bar{\mathbb{R}}^n$ un ensemble contenant au moins $n+2$ points, alors il existe une partition non-triviale $S = A_1\sqcup A_2$ telle que les enveloppe convexe de A_1 et A_2 s'intersectent :*

$$Conv^\infty(A_1)\cap Conv^\infty(A_2)\neq\varnothing.$$

Démonstration: D'après Théorème de Radon classique 4.11, il existe des partitions $S = A_1^{(r)}\sqcup A_2^{(r)}$ telles que $Conv^r(A_1^{(r)})\cap Conv^r(A_2^{(r)})\neq\varnothing$, cet ensemble contient donc un point x_r.

Puisque S est fini on peut donc extraire une sous-suite (r_k) telle que $A_1^{(r_k)}$ et $A_2^{(r)}$ restent constante.

D'après la compacité, on peut encore extraire une sous-suite telle que x_{r_k} converge, la limite est donc dans

$$Conv^\infty(A_1)\cap Conv^\infty(A_2).$$

□

Corollaire 4.16. *Soit* $v_1, \cdots, v_{n+1} \in \bar{\mathbb{R}}^n$*, alors il existe deux ensemble non-vides disjoints* $I, J \subset \{1, \cdots, n+1\}$ *et des constantes* $(a_i, b_j)_{i \in I, j \in J}$ *tel que*

$$\bigoplus_{i \in I} (a_i \otimes v_i) = \bigoplus_{j \in J} (b_i \otimes v_j).$$

Démonstration: Le résultat s'en suit en prenant les $n+2$ points comme les $n+1$ vecteurs donnés et le point $(\infty, \cdots, \infty)$. □

5
REMARQUES ET PROBLÈMES OUVERTS

5.1 Remarques

Dans Section 1, on a introduit le concept de complexe tropicale ainsi que l'opération de subdivision. On peut se poser la question : est-ce que la définition de complexe tropicale forte est indépendante du choix de représentant dans une variété tropicale ?

Pour répondre à cette question, il faut investiguer la propriété de la matrice d'intersection locale dans le passage à une subdivision. Dans [Car15], le passage a été établi pour une opération appelée *cône local*. Ce passage peut impliquer le passage à une subdivision et donc la réponse de notre question est positive.

Théorème 5.1. *Soient Δ un complexe tropical fort et Δ' une subdivision d'ordre m de Δ, alors Δ' est encore un complexe tropical fort.*

Dans Section 2, on a présenté un peu la théorie des variétés immergées dans des espace euclidien, sans la rendre adaptée au cadre de Cartwright : on n'a pas construit les constantes de structure $\alpha(v, r)$.

Question 5.2. *Est-ce possible de définir les constantes de structure $\alpha(v, r)$ de manière naturelle pour que une variété tropicale immergée présentée dans Section 2 devienne un complexe tropical ? Quelles sont les constantes de structure $\alpha(v, r)$ candidates ?*

Notons qu'il faut que les notions de diviseur coincident.

Dans Section 3, on a définit les diviseurs ainsi que leur intersection, de plus, on a démontré deux version du principe de maximum. Mais les deux versions ne sont pas très générales : ils demande des conditions assez fortes soit sur les constantes de structure, soit sur la connexité quand on enlève un point.

Question 5.3. *Peut-on établir une version plus générale du principe de maximum ?*

Dans Section 4, on a introduit trois notions de rang : le rang d'évitement, le rang tropical et le rang générateur. On a montré que le rang tropical est inférieur ou égale au rang générateur, mais on n'a établi aucun résultat sur la finitude de ces rangs.

Question 5.4. *Est-ce que les rangs sont tous finis ? Existe-t-il des relations entre le rang dévitement et les deux autres rangs ?*

5.2 Conjecture de Riemann-Roch

Pour une surface tropicale X avec représentant Δ, on peut définir

$$K_X := \sum_{r \text{ ridge}} (\deg(r) - 2)[r]$$

qui généralise la définition de diviseur canonique pour le cas de graphe vue en cours.

Question 5.5. *Pour quelles surfaces tropicales K_x est un diviseur (défini par fonction PL localement) ?*

Conjecture 5.6 (Riemann-Roch)**.** *Soit D un diviseur sur une surface tropicale X tel que K_X est un diviseur, alors on a*

$$h^0(D) + h^0(K_X - D) \geq \frac{\deg D \cdot (D - K_X)}{2} + \chi(X),$$

où χ signifie la caractéristique d'Euler.

Définition 5.7. *On dit qu'un diviseur D sur une surface tropicale X est* ample *si* $\deg D \cdot D > 0$ *et si* $(h^0(K_X - mD))_{m \in \mathbb{N}}$ *est bornée.*

Conjecture 5.8. *Soit D un diviseur ample sur une surface tropicale X tel que K_X est un diviseur, alors il existe une constante $C(D)$ telle que $r(mD) \geq C(D)m^2$.*

Cette conjecture s'en suit de la conjecture de Riemann-Roch, elle donne une borne de croissance quadratique de $h^0(mD)$. On remarque que une borne linéaire est donnée par 4.4.

5.3 Ensemble rang-déterminant

Question 5.9. *Comment calculer le rang ? Existe-t-il un algorithme avec un nombre fini d'opération pour le calculer ?*

Définition 5.10. *Soit $A \subset X$ un sous-ensemble de points rationnels d'une variété tropicale. On définit $h^0_A(D)$ comme le cardinal m du plus petit ensemble $\{p_1, \cdots, p_m\} \subset A$ tel qu'il n'existe pas de $D' \in \mathcal{M}(D)$ tel que le support de D' contienne $p_1, \cdots, p_m$. S'il n'existe pas un tel ensemble fini de points, alors $h^0 A(D)$ est défini comme ∞.*

Définition 5.11. *Un ensemble A est dit rang-déterminant si $h^0_A(D) = h^0(D)$ pour tout diviseur D.*

Si on connaît un ensemble rang-déterminant fini, le calcul du rang sera beaucoup simplifié. Et c'est exactemant le cas si on est en dimension 1. C'est démontré par Y. Luo [Luo11] et redémontré par O. Amini [Ami10] que

Théorème 5.12. *Sur un graphe métrique Γ, il existe un ensemble A de taille $g+1$, où g le genre de Γ, tel que A est rang-déterminant.*

Conjecture 5.13. *Sur toute variété tropicale, il existe un ensemble rang-déterminant fini.*

Références

[AGG08] Marianne Akian, Stephane Gaubert et Alexander Guterman. *Linear independence over tropical semirings and beyond*. 2008. arXiv : 0812.3496 [math.AC].

[Ami10] Omid Amini. « Reduced divisors and embeddings of tropical curves ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 365 (2010), p. 4851-4880. url : https://api.semanticscholar.org/CorpusID:18811782.

[AP21] Omid Amini et Matthieu Piquerez. *Homology of tropical fans*. 2021. arXiv : 2105.01504 [math.AG].

[AP23] Omid Amini et Matthieu Piquerez. *Hodge Theory for Tropical Fans*. 23 oct. 2023. arXiv : 2310.15367. Prépubl.

[BH04] Walter Briec et Charles Horvath. « $\mathbb{B}$-convexity ». In : *Optimization, vol. 53, No. 2* (2004), p. 103-127.

[BP94] A. Berman et R.J. Plemmons. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial et Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1994. url : https://books.google.fr/books?id=VAT8bq_-_YIC.

[Car15] Dustin Cartwright. *Combinatorial Tropical Surfaces*. 5 juin 2015. arXiv : 1506.02023. Prépubl.

[Car19] Dustin Cartwright. *Tropical Complexes*. 3 sept. 2019. arXiv : 1308.3813. Prépubl.

[Car21] Dustin Cartwright. « A specialization inequality for tropical complexes ». In : *Compositio Mathematica* (2021).

[FJP23] Gavril Farkas, David Jensen et Sam Payne. *The Kodaira Dimensions of $\overline{\mathcal{M}}_{22}$ and $\overline{\mathcal{M}}_{23}$*. 22 juin 2023. arXiv : 2005.00622. Prépubl.

[KY94] Stefan Krasa et Nicholas C. Yannelis. « An elementary proof of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-Shapley Theorem ». In : *Economic Theory, 4* (1994), p. 467-471. url : https://doi.org/10.1007/BF01215384.

[Luo11] Ye Luo. « Rank-determining sets of metric graphs ». In : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 118.6 (2011), p. 1775-1793. doi : https://doi.org/10.1016/j.jcta.2011.03.002.

[MZ08] Grigory Mikhalkin et Ilia Zharkov. « Tropical curves, their Jacobians and theta functions ». In : *Curves and abelian varieties, Contemp. Math.vol. 465, Amer. Math. Soc.* (2008), p. 203-230.