

# RAPPORT D'ENSEIGNEMENT APPROFONDI

Homologie et homotopie persistante  
Dirigé par: GINOT Grégory

6 janvier 2026

—  
YE Xiaowei



# Sommaire

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Homologie Persistante</b>                      | <b>3</b>  |
| 1.1 Modules de persistance . . . . .                | 3         |
| 1.2 Structure des modules de persistance . . . . .  | 5         |
| 1.3 Distance entre modules de persistance . . . . . | 6         |
| 1.4 Stabilité . . . . .                             | 9         |
| <b>2 Homotopie Persistante</b>                      | <b>10</b> |
| 2.1 Distance d'entrelacement d'homotopie . . . . .  | 11        |
| 2.2 Un peu de théorie des catégories . . . . .      | 12        |
| 2.3 L'inégalité triangulaire . . . . .              | 14        |
| 2.4 Théorème de Whitehead persistant . . . . .      | 15        |

# Introduction

Les études de la persistance dans des espaces topologiques filtrés est inspiré par l'analyse topologique des données (ATD). Comme dans la topologie algébrique classique, on étudie ces objets via des invariants algébriques. Du point de vue des applications, on souhaite avoir des invariants par homotopie (de façon à ne pas être sensibles à de petites déformations) qui sont comparables pour divers jeux de données, ce qui va se faire par l'intermédiaire de (pseudo-)métriques.

Regardons d'abord des applications en ATD. Souvent, ces données apparaissent comme un grand sous-ensemble fini d'un espace euclidien — qu'on qualifie souvent de nuage de points. Ce qu'on appelle *l'hypothèse de variété* prescrit que ces données s'accumulent sur une sous-variété  $X$  de l'espace ambiant. On peut alors penser les données comme une discréétisation de cet objet continu  $X$ , qui peut être a priori inconnu. L'ATD a pour but d'étudier la topologie de  $X$  pour comprendre ou organiser les données. On s'appuie sur les méthodes de la topologie algébrique classique adaptées aux espaces filtrés pour estimer la topologie des données.

Dans l'exemple d'un sous-ensemble discret  $\mathbb{X}$  d'un espace euclidien, vu comme une approximation d'une sous-variété  $X$ , on peut considérer  $\mathbb{X}(r) = \bigcup_{x \in \mathbb{X}} B(x, r)$ . Si  $\mathbb{X}$  est une bonne approximation de  $X$ , alors  $\mathbb{X}(r)$  est un espace topologique qui, pour un  $r$  ni trop petit (sinon on ne voit que les points) ni trop grand, va être un épaississement de  $X$  qui lui sera homotope. On remarque que cette famille  $(\mathbb{X}(r))_{r \geq 0}$  est filtrée au sens où  $r < r'$  implique  $\mathbb{X}(r) \subset \mathbb{X}(r')$ .

Étant donné des espaces filtrés  $(X_i)_{i \in \mathbb{R}}$ , on peut induire une filtration des modules (ou bien un *module persistant*)  $(H_k(X_i))_{i \in \mathbb{R}}$  en prenant l'homologie de certain degré  $k$ . Cette structure a de bonnes propriétés dans le cadre algébrique, notamment la décomposition en indécomposables simples caractérisés par un intervalle de  $\mathbb{R}$ . La donnée de ces intervalles est un objet combinatoire, appelé son *code-barres*, qui permet de le manipuler informatiquement et combinatoirement facilement. Les modules de persistance ont une (pseudo-)métrique naturelle, appelée *distance d'entrelacement*, qui a une traduction combinatoire sur le code-barres appelée *distance bottleneck*. Dans les applications, les distances que l'on a obtenues pour comparer les modules persistants (ou leurs code-barres associés à des données) reflètent bien la géométrie des données. Ceci est établi par les *théorèmes de stabilité*, qui essentiellement garantissent que l'homologie persistante est stable sous petite déformation.

Ces résultats font partie de ce qu'on appelle la théorie de *l'homotopie persistante*, qui permet des applications bien implementables sur machine. On renvoie les lecteurs vers [Gin25]. Par analogie avec la topologie algébrique classique, on imagine qu'il devrait exister une théorie de *l'homotopie persistante*. On abordera également ce sujet dans ce rapport. On renvoie les lecteurs vers [BL23].

On introduit les *entrelacements d'homotopie* et la métrique induite, la *distance d'entrelacement d'homotopie*, et on présentera les analogies des résultats en homologie persistance. Les entrelacements d'homotopie nous permettent de formuler des théorèmes sur l'homologie persistante directement au niveau des espaces filtrés, plutôt qu'au niveau des codes-barres. Nous discuterons aussi le problème d'obtenir un théorème de Whitehead persistant [LS20] en utilisant les entrelacements d'homotopie.

# Chapitre 1

## Homologie Persistante

### 1.1

#### MODULES DE PERSISTANCE

Soit  $\mathbb{F}$  un corps. Nous introduisons le miroir algébrique des espaces filtrés : la notion de module de persistance. On commence par une définition plus générale.

**Définition 1.1.1** (Objet de persistance). *Soient  $(S, <)$  un ensemble partiellement ordonné et  $\mathcal{C}$  une catégorie, on appelle la catégorie des  $\mathcal{C}$ -objets de persistance modélisés sur  $(S, <)$  la catégorie des foncteurs de  $S^<$  vers  $\mathcal{C}$ , où  $S^<$  est la catégorie avec ensemble d'objets  $S$  et les ensembles des morphismes*

$$Hom_{S^<}(s, t) = \begin{cases} \{\ast\} & \text{si } s = t \text{ ou } s < t; \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

En prenant  $S^< = \mathbb{R}^<$  et  $\mathcal{C} = \text{Top}$ , on obtient les modules de persistance.

**Exemple 1.1.2** (Module d'intervalle). *Soit  $E$  un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel et soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dispose d'un module de persistance associé défini comme suit : pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a*

$$E_I(t) = \begin{cases} E & \text{si } t \in I \\ \{0\} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et les morphismes structuraux sont donnés, pour tout  $s \leq t$ , par  $\iota_{s \leq t}^{E_I} = id_E$  si  $t, s \in I$  et  $0$  sinon.

**Exemple 1.1.3.** Pour tout réel  $t$ , on pose  $\tilde{\mathbb{F}}(t) = \mathbb{F}$  et, pour  $s < t$ ,

$$\iota_{s \leq t}^{\tilde{\mathbb{F}}} = \begin{cases} id_{\mathbb{F}} & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } s \leq 0 \text{ et } t > 0 \\ id_{\mathbb{F}} & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

On vérifie que c'est bien un module de persistance, et pour tout  $t$ , on a  $\tilde{\mathbb{F}}(t) = \mathbb{F}_{\mathbb{R}}(t)$ , mais les morphismes structuraux diffèrent. En particulier,  $\tilde{\mathbb{F}}$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{F}_{\mathbb{R}}$  comme module de persistance.

Puisque tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  héritant d'une structure d'ensemble partiellement ordonné, nous avons immédiatement une notion de modules et objets de persistance pour tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

Et par ailleurs, tout objet persistant sur  $\mathbb{R}$  induit une telle structure par restriction. Notons que si  $S \subset \mathbb{R}$  est discret, on peut étendre tout module de persistance  $F$  sur  $S$  en un module sur  $\mathbb{R}$  en prenant pour  $t \in [s, s[$ , avec  $s, s'$  deux éléments consécutifs de  $S$ ,  $F(t) = F(s)$  et en étendant les morphismes de structure par l'identité sur  $[s, s[$ .

**Exemple 1.1.4** (Espaces de persistance). *Soit  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  une famille d'espaces topologiques tels que pour  $s < t$  on ait  $X(s) \subset X(t)$ . Alors cette collection  $(X(s), X(s) \hookrightarrow X(t))_{s \leq t}$  définit un espace topologique de persistance. On remarque que les exemples de sous-niveaux de fonction et de réunion de boules de l'introduction sont précisément de cette nature. Et que tout espace filtré au sens usuel l'est également (pour le sous-ensemble  $\mathbb{N}$  de  $\mathbb{R}$ ). De même, un complexe simplicial filtré  $F_0 X \subset \dots \subset F_n X \subset \dots$  est un complexe simplicial de persistance modélisé sur  $\mathbb{N}$ .*

**Exemple 1.1.5** (Module de persistance associé à un espace de persistance). *Soit  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  une famille d'espaces topologiques telle que pour  $s < t$  on ait  $X(s) \subset X(t)$ . Notons  $\iota_{s \leq t} : X(s) \hookrightarrow X(t)$  les inclusions. Alors, en prenant les groupes d'homologie en degré  $i$ , on obtient des applications linéaires  $H_i(\iota_{s \leq t}, \mathbb{F}) : H_i(X(s), \mathbb{F}) \rightarrow H_i(X(t), \mathbb{F})$  qui font de*

$$(H_i(X(t), \mathbb{F}), H_i(\iota_{s \leq t}, \mathbb{F}))_{s,t}$$

*un module de persistance (car prendre les groupes d'homologie est un foncteur). On notera que bien que  $\iota_{s \leq t}$  soit une inclusion, on n'a aucune propriété particulière pour les morphismes induits en homologie.*

On appelle aussi ce module de persistance l'homologie persistante de  $(X(t))_t$ .

Notons qu'une construction similaire à l'exemple précédent fonctionne pour tout espace topologique de persistance (autrement dit un objet de persistance dans la catégorie des espaces topologiques), ou pour tout complexe de chaînes de persistance.

**Remarque 1.1.6.** *La remarque naïve est ici que tout foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  induit un foncteur des  $\mathcal{C}$ -objets de persistance vers les  $\mathcal{D}$ -objets de persistance, par simple composition de foncteurs.*

**Exemple 1.1.7** (Sous-niveaux). *Soit  $X$  un espace topologique et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Le sous-niveau (ouvert) de hauteur  $t$  est la préimage  $X^f(t) := f^{-1}(]-\infty, t[)$ . On a en particulier que  $X^f(s) \subset X^f(t)$  si  $s \leq t$ . D'après l'exemple 1.1.5, on a pour tout  $i \in \mathbb{N}$  du module de persistance*

$$H_i(X^f(t), \mathbb{F})$$

*appelé module de persistance en degré  $i$  de  $f$ .*

Donnons maintenant un exemple clé en lien avec l'approximation discrète d'un sous-espace.

**Exemple 1.1.8** (Module de Čech). *Soit  $\mathbb{X}$  un sous-ensemble d'un espace métrique  $(Y, d)$  et soit  $r > 0$ . On construit un complexe simplicial (abstrait)  $\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_r)$  dont les sommets sont les points de  $\mathbb{X}$ . L'ensemble  $\Delta^n(\mathbb{X}_t)$  des  $n$ -simplexes de  $\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_t)$  est l'ensemble des  $(n+1)$ -uplets  $\{x_0, \dots, x_n\}$  de points de  $\mathbb{X}$  tels que*

$$\bigcap_{i=0}^n B(x_i, r) \neq \emptyset.$$

*Par convention on pose  $\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_r) = \emptyset$  pour  $r \leq 0$ .*

*Pour tout  $r < r'$ , l'ensemble  $\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_r)$  est un sous-complexe simplicial de  $\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_{r'})$ . En passant aux groupes d'homologie simpliciale, on obtient pour tout entier naturel  $i$  un module de persistance*

$$H_i \check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}) = \left( H_i(\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_r), \mathbb{F}) \right)_r$$

*dont les morphismes structuraux sont induits par les inclusions.*

Cet espace a une autre interprétation. Il s'agit en fait d'une abstraction combinatoire de la réunion des boules de rayon  $r$  dont les centres sont les points de  $X$ .

**Proposition 1.1.9.** *Soit  $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^m$ . Alors la réalisation géométrique du complexe de Čech  $|\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_r)|$  est homotope à  $\bigcup_{x \in \mathbb{X}} B(x, r)$  et le diagramme suivant est commutatif à homotopie près :*

$$\begin{array}{ccc} |\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_r)| & \longrightarrow & |\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_{r'})| \\ \simeq \Big| & & \Big| \simeq \\ \bigcup_{x \in \mathbb{X}} B(x, r) & \longrightarrow & \bigcup_{x \in \mathbb{X}} B(x, r'). \end{array}$$

Notons que si  $\mathbb{X}$  est fini, alors pour  $r$  petit, l'homologie persistante est concentrée en degré 0 et y est engendré par les points de  $\mathbb{X}$ ; et pour  $r$  grand,  $\check{\mathcal{C}}(\mathbb{X}_r)$  est homotope à une boule et donc contractile. L'information intéressante réside dans les transformations qui se présentent entre ces deux extrêmes.

## 1.2

# STRUCTURE DES MODULES DE PERSISTANCE

---

Étant donnée une catégorie de foncteurs à valeurs dans les espaces vectoriels, la catégorie des modules de persistance hérite de limites et colimites (donc de produits et coproduits). En particulier nous avons la notion de somme directe  $M \oplus N$  de deux modules de persistance  $M, N$  :

$$(M \oplus N)(t) = M(t) \oplus N(t), \quad (M \oplus N)(s) \xrightarrow{(\iota_{s \leq t}^M, \iota_{s \leq t}^N)} (M \oplus N)(t).$$

Nous notons simplement 0 le module de persistance qui vaut 0 en tout point.

**Définition 1.2.1** (Module décomposable). *On dit qu'un module persistant  $M$  est décomposable s'il est isomorphe à une somme directe  $N_1 \oplus N_2$  avec  $N_1, N_2 \neq 0$ . Sinon on dit qu'il est indécomposable.*

**Lemme 1.2.2.** *Les modules d'intervalle sont des objets injectifs dans la catégorie des modules de persistance p.f.d., i.e., tout sous-module isomorphe à un module d'intervalle est un sommand direct.*

*Démonstration.* Soit  $\iota$  l'injection de  $\mathbb{F}_I$  dans  $M$ , alors  $\operatorname{colim}_I \iota : \operatorname{colim}_I \mathbb{F}_I = \mathbb{F} \rightarrow \operatorname{colim}_I M$  est aussi injective. On a alors  $\hat{\iota} : \operatorname{colim}_I M \rightarrow \mathbb{F}$  tel que  $\hat{\iota} \circ \iota = \operatorname{id}$ . On définit alors  $g_x : M_x \rightarrow (\mathbb{F}_I)_x$  par la composition  $M_x \rightarrow \operatorname{colim}_I M \xrightarrow{\hat{\iota}} \mathbb{F} \cong (\mathbb{F}_I)_x$  si  $x \in I$  et  $g_x = 0$  sinon, on a alors  $g \circ \iota = \operatorname{id}$ .  $\square$

**Lemme 1.2.3.** *Soit  $M$  un module persistant tel que  $M_x \neq 0$  pour tout  $x \in I$ . Si  $\phi_a^t$  est injectif pour tout  $t \geq a$ , alors  $\mathbb{F}_I$  est sommand de  $M$ . Dualement, ceci reste vrai si  $\phi_a^t$  est surjectif pour tout  $t \geq a$ .*

*Démonstration.* Soit  $p \in I$  tel que  $\dim M_p$  est minimal, prenons  $m_p \in M_p \setminus \{0\}$ . Pour tout  $q \in I$ , il existe  $c \in I$  tel que  $p, q \geq c$ . On a alors  $\dim M_c = \dim M_p$  et donc  $\phi_c^p$  est un isomorphisme. On définit  $m_q := \phi_c^q((\phi_c^p)^{-1}(m_p)) \in M_q$ , ceci ne dépend pas du choix de  $c$ . Ces éléments  $m_q$  définissent une inclusion de  $\mathbb{F}_I$  vers  $M$ , et on conclut par lemme 1.2.2.  $\square$

Les modules de persistance ont une décomposition très simple en indécomposables :

**Théorème 1.2.4** (de structure des modules persistants [CO20, BCB20]). *Soit  $M$  un module de persistance p.f.d., i.e. pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\dim M(t) < \infty$ . Alors  $M$  se décompose sous la forme*

$$M \cong \bigoplus_{I \in \mathbf{B}(M)} \mathbb{F}_I$$

où  $\mathbf{B}(M)$  est un multi-ensemble d'intervalles. La décomposition est unique à isomorphisme près et à l'ordre près des termes dans la somme directe.

Par un multi-ensemble on entend un ensemble avec répétition possible de chaque intervalle.

**Définition 1.2.5** (Code-barres). *Le code-barres d'un module de persistance  $M$  est le multi-ensemble d'intervalles  $\mathbf{B}(M)$  donné par le théorème de décomposition.*

Le code-barre est une donnée combinatoire très simple qui caractérise complètement tout module de persistance p.f.d.. En particulier, cette donnée est facilement stockable informatiquement.

*Démonstration du théorème 1.2.4.* L'argument pour l'unicité est standard. Par un argument de type de Zorn, on peut montrer que  $M$  se décompose en somme des modules indécomposables. Il reste à montrer que les modules indécomposables. Supposons donc que  $M$  est indécomposable. On suppose que le support  $I$ .  $I$  est un intervalle par indécomposabilité.

On cosidère d'abord le cas inf  $I =: a \in I$ . Prenons  $x \in M_a$ , alors  $N(t) = \phi_a^t(x\mathbb{R})$  est un sous-module de  $M$  qui est isomorphe à un module d'intervalle, le résultat suist donc par lemme 1.2.2.

Pour le cas général, on montre que les morphismes  $\phi_x^y$  sont surjectifs pour tout  $x < y$ . Soit  $N$  un sommand indécomposable de  $M_{\geq x}$ . Si  $N_x = 0$ , alors  $N$  est en fait un sommand de  $M$ , une contradiction ! Ainsi,  $M_{\geq x}$  se décompose en somme des modules d'intervalles qui contiennent  $x$ . Donc es morphismes  $\phi_x^y$  sont surjectifs pour tout  $x < y$ . Et on conclut par lemme 1.2.3.  $\square$

**Exemple 1.2.6.** Le module de persistance  $\tilde{\mathbb{F}}$  de l'exemple 1.1.3 se décompose comme  $\tilde{\mathbb{F}} = \mathbb{F}_{]-\infty, 0]} \oplus \mathbb{F}_{]0, +\infty[}$ . Donc il a pour code-barre  $\{]-\infty, 0], ]0, +\infty[\}$ .

## 1.3 DISTANCE ENTRE MODULES DE PERSISTANCE

Dans les applications pour l'analyse des données, un point fondamental est de pouvoir comparer à quel point des modules de persistance sont proches l'un de l'autre. Par exemple, si le module de persistance associé à une discréttisation d'un espace est proche de celui de l'espace en question ?

La structure persistante permet de définir une notion de distance entre les objets persistants. Par ailleurs, elle peut se transférer sur le code-barre, permettant de la calculer d'une manière algorithmique.

La distance induite par la structure persistante a un sens pour les espaces vectoriels et plus généralement pour des objets de persistance dans toute catégorie. Elle est basée sur la notion de décalage.

**Définition 1.3.1** (Décalage d'un objet persistant). *Soit  $F : \mathbb{R}^{\leq} \rightarrow \mathcal{C}$  un objet persistant dans  $\mathcal{C}$  et soit  $\varepsilon > 0$ . On note le décalage de longueur  $\varepsilon$  de  $F$  par  $F[\varepsilon] : \mathbb{R}^{\leq} \rightarrow \mathcal{C}$  l'objet persistant défini comme suit :  $F[\varepsilon](t) = F(t + \varepsilon)$  et, pour  $s \leq t$ , le morphisme structuré  $\iota_{s \leq t}^{F[\varepsilon]} : F[\varepsilon](s) \rightarrow F[\varepsilon](t)$  est donné par*

$$\iota_{s \leq t}^{F[\varepsilon]} = \iota_{s+\varepsilon \leq t+\varepsilon}^F : F[\varepsilon](s) = F(s + \varepsilon) \rightarrow F(t + \varepsilon) = F[\varepsilon](t).$$

De façon similaire, si  $f : F \rightarrow G$  est un morphisme de modules de persistance, on pose

$$f[\varepsilon] = \left( F[\varepsilon](t) = F(\varepsilon + t) \xrightarrow{f_{t+\varepsilon}} G(\varepsilon + t) = G[\varepsilon](t) \right)_{t \in \mathbb{R}}.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $F[\varepsilon]$  est un objet de persistance de  $\mathcal{C}$  et  $(F \mapsto F[\varepsilon], f \mapsto f[\varepsilon])$  est un endofoncteur de la catégorie des objets de persistance de  $\mathcal{C}$ . De plus, la collection de morphismes  $(\iota_{t \leq t+\varepsilon}^F : F(t) \rightarrow F(t+\varepsilon))_{t \in \mathbb{R}}$  est un morphisme de modules de persistance  $F \rightarrow F[\varepsilon]$ , que l'on notera  $\tau^F[\varepsilon]$  et appellera morphisme de décalage de longueur  $\varepsilon$ . Pour tout  $\varepsilon' > 0$ , on a  $\tau^F[\varepsilon] \circ \tau^F[\varepsilon'] = \tau^F[\varepsilon + \varepsilon']$ .

**Définition 1.3.2** (Distance d'entrelacement). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Soient  $F, G : \mathbb{R}^{\leq} \rightarrow \mathcal{C}$  des objets persistants. On dit que  $F$  et  $G$  sont  $\varepsilon$ -entrelacés s'il existe  $\mu : F \rightarrow G[\varepsilon]$  et  $\nu : G \rightarrow F[\varepsilon]$  tels que  $\tau^F[2\varepsilon] = \nu[\varepsilon] \circ \mu$  et  $\tau^G[2\varepsilon] = \mu[\varepsilon] \circ \nu$ . On appelle distance d'entrelacement entre  $F$  et  $G$  l'infimum

$$d_I(F, G) := \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid F \text{ et } G \text{ sont } \varepsilon\text{-entrelacés}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

**Lemme 1.3.3.** La distance d'entrelacement est une pseudo-distance :

$$d_I(F, G) \geq 0 \quad \text{et} \quad d_I(F, H) \leq d_I(F, G) + d_I(G, H).$$

Notons que la distance d'entrelacement a du sens pour n'importe quelle catégorie  $\mathcal{C}$ .

**Lemme 1.3.4.** Si  $\Psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un foncteur, alors le foncteur induit  $\text{Pers}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Pers}(\mathcal{D})$  est 1-lipschitzien : pour toute paire  $(F, G) : \mathbb{R}^{\leq} \rightarrow \mathcal{C}$  d'objets  $\mathcal{C}$ -persistants, on a

$$d_I(\Psi \circ F, \Psi \circ G) \leq d_I(F, G).$$

Le lemme s'applique en particulier pour les foncteurs groupes d'homologie  $H_i(-, \mathbb{F})$ .

**Exemple 1.3.5** (Décalage d'un module intervalle). Soient  $E$  un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel et  $I = \langle a, b \rangle$  un intervalle (où on utilise  $\langle, \rangle$  pour ne pas préciser si les bornes sont ouvertes ou fermées). Le décalage par  $\varepsilon$  du module intervalle  $E_I$  est  $E_I[\varepsilon] = E_{\langle a-\varepsilon, b-\varepsilon \rangle}$ . C'est donc le même module, mais porté par la translation de  $\varepsilon$  sur la droite de l'intervalle  $I$ . On remarque que le morphisme de décalage naturel  $\mathbb{F}_I \rightarrow \mathbb{F}_I[\varepsilon]$  est nul si  $\varepsilon > b - a$  et non nul si  $\varepsilon < b - a$ . On peut en déduire le résultat suivant.

**Lemme 1.3.6.** On a  $d_I(\mathbb{F}_{\langle a,b \rangle}, 0) = \frac{b-a}{2}$  et  $d_I(\mathbb{F}_{\langle a,b \rangle}, \mathbb{F}_J) = 0$  pour tout intervalle  $J$  avec les mêmes extrémités que  $I$ . De plus,  $d_I(\mathbb{F}_{\langle a,b \rangle}, \mathbb{F}_J) = +\infty$  si  $J$  est non borné.

La distance entre deux modules de persistance indécomposables dépend de la taille des intervalles et de la comparaison entre les extrémités des intervalles. Le théorème de structure 1.2.4 suggère alors de transférer la distance entre modules de persistance vers leurs code-barres. Soient  $A, B$  des (multi)-ensembles de barres (intervalles de  $\mathbb{R}$ ). Si  $I$  est un intervalle, on notera  $s_I \leq t_I$  ses extrémités.

**Définition 1.3.7** (Correspondance partielle). Une correspondance partielle entre  $A$  et  $B$ , notée  $A \xrightarrow{G} B$ , est la donnée d'un sous-ensemble  $G \subset A \times B$  tel que les projections naturelles  $G \rightarrow A$  et  $G \rightarrow B$  soient injectives. On dira qu'un élément  $(I, J) \in G$  est une paire accouplée et a contrario qu'un élément  $I \in A \coprod B$  qui ne correspond pas à une paire accouplée est un élément non accouplé.

À toute correspondance partielle  $G \subset A \times B$ , on associe son coût :

- si  $(I, J) \in G$ , le coût de  $(I, J)$  est  $c(I, J) = \|(s_I, t_I) - (s_J, t_J)\|_{\infty}$  ;
- si  $K \in A \coprod B$  est une barre non accouplée, le coût de  $K$  est  $c(K) = \frac{|s_K - t_K|}{2}$  ;

— le coût total de  $G$  est

$$c(G) := \max(c(I, J), c(K)), \text{ sur } (I, J) \text{ paires accouplées, } K \text{ non accouplée}.$$

**Définition 1.3.8** (Distance bottleneck). Soient  $A, B$  des code-barres. La distance bottleneck

$$d_{\text{bn}}(A, B) := \inf_{A \xrightarrow{G} B} (c(G)),$$

la borne inférieure étant prise sur les correspondances partielles entre  $A$  et  $B$ .

Un point clé dans les applications est que la distance bottleneck peut se calculer algorithmiquement via des algorithmes efficaces d'appariement. Le théorème suivant permet de calculer la distance d'entrelacement en termes de la distance bottleneck.

**Théorème 1.3.9** (Isométrie, [BL15]). Soient  $M, N$  deux modules de persistance p.f.d., alors

$$d_I(M, N) = d_{\text{bn}}(\mathbf{B}(M), \mathbf{B}(N)).$$

*Démonstration.* Montrons d'abord  $d_{\text{bn}}(\mathbf{B}(M), \mathbf{B}(N)) \geq d_I(M, N)$ . Prenons  $\varepsilon > d_{\text{bn}}(\mathbf{B}(M), \mathbf{B}(N))$ , il existe une correspondance partielle dont le coût est inférieur à  $\varepsilon$ , et on va construire un  $\varepsilon$ -entrelacement. Pour les intervalles non accouplés, on impose l'application nulle. Pour  $(I, J) \in G$ , on impose entre  $\mathbb{F}_I$  et  $\mathbb{F}_J$  les applications id sur  $I \cap J$  et 0 ailleurs. Ceci donne bien un  $\varepsilon$ -entrelacement.

La démonstration de  $d_{\text{bn}}(\mathbf{B}(M), \mathbf{B}(N)) \leq d_I(M, N)$  s'appuie sur les correspondances induites [BL15]. Nous allons d'abord construire une action non canonique (au sens non fonctorielle) des morphismes  $f : M \rightarrow N$  sur les codes-barres  $\mathbf{B}(M)$  et  $\mathbf{B}(N)$ .

Supposons d'abord que  $f$  est une surjection. Nous construisons l'action sur les codes-barres comme suit : Pour tout  $b \in \mathbb{R}$ , on trie les intervalles dans  $\mathbf{B}(M)$  comme  $(b, d_1] \supseteq (b, d_2] \supseteq \dots \supseteq (b, d_k]$  par ordre décroissant. De même pour  $\mathbf{B}(N) : (b, c_1] \supseteq (b, c_2] \supseteq \dots \supseteq (b, c_K]$ . Puis on apparie ces intervalles via le principe « longest first », obtenant un matching  $\mu_{\text{sur}} : \mathbf{B}(M) \rightarrow \mathbf{B}(N)$ .

**Proposition 1.3.10.**  $\text{im } \mu_{\text{sur}} = \mathbf{B}(N)$  et  $\mu_{\text{sur}}(b, d] = (b, e]$  implique  $d \geq e$ .

Si  $\iota : M \rightarrow N$  est une injection, nous construisons l'action sur les codes-barres par dualité, donc

**Proposition 1.3.11.**  $\text{im}(\mu_{\text{inj}}^{-1}) = \mathbf{B}(M)$  et  $\mu_{\text{inj}}(b, d] = (c, d]$  implique  $c \leq b$ .

Si  $f : M \rightarrow N$  est un morphisme quelconque, on le décompose comme  $M \xrightarrow{\sigma} \text{im } f \xrightarrow{\iota} N$ , puis on obtient les correspondances  $\mu_{\text{sur}} : \mathbf{B}(M) \rightarrow \mathbf{B}(\text{im } f)$  et  $\mu_{\text{inj}} : \mathbf{B}(\text{im } f) \rightarrow \mathbf{B}(N)$ . On remarque que  $\text{im } \mu_{\text{sur}} = \mathbf{B}(\text{im } f) = \text{im}(\mu_{\text{inj}}^{-1})$ , et donc on peut définir  $\mu(f) = \mu_{\text{inj}} \circ \mu_{\text{sur}}$ .

Décomposons  $f : V \rightarrow W[\delta]$  comme deux applications  $M \xrightarrow{\sigma} \text{im } f \xrightarrow{\iota} N[\delta]$ .

**Lemme 1.3.12.** On a les propriétés suivantes pour  $\mu_{\text{sur}}(f)$ , et les résultats analogues sur  $\mu_{\text{inj}}(f)$  :

1.  $\text{im}(\mu_{\text{sur}}^{-1})$  contient les intervalles de  $\mathbf{B}(M)$  de longueurs au moins  $2\delta$ .
2. Si  $\mu_{\text{sur}}$  envoie  $(b, d]$  sur  $(b, d']$ , alors  $d' \in [d - 2\delta, d]$

Étant donné un  $\delta$ -entrelacement  $(f, g)$ , nous avons un matching  $\Psi_\delta : \mathbf{B}(N[\delta]) \rightarrow \mathbf{B}(N)$  obtenu en décalant chaque barre. Considérons maintenant le matching  $\mu = \mu(f)$  et formons la composition

$$\mathbf{B}(M) \xrightarrow{\mu_{\text{sur}}} \mathbf{B}(\text{im } f) \xrightarrow{\mu_{\text{inj}}} \mathbf{B}(N[\delta]) \xrightarrow{\Psi_\delta} \mathbf{B}(N).$$

Suivons le parcours d'une barre sous cette application :

$$(b, d] \xrightarrow{\mu_{\text{sur}}} (b, d'] \xrightarrow{\mu_{\text{inj}}} (b', d'] \xrightarrow{\Psi_\delta} (b' + \delta, d' + \delta].$$

D'après lemme 1.3.12, toute barre de longueur au moins  $2\delta$  est appariée ;  $d - 2\delta \leq d' \leq d$  et  $b - 2\delta \leq b' \leq b$ . Ainsi,  $|(b' + \delta) - b| \leq \delta$  et  $|(d' + \delta) - d| \leq \delta$ . On a bien une  $\delta$ -correspondance.  $\square$

## 1.4

# STABILITÉ

Une question élémentaire qui se pose est de savoir si la notion de distance d'entrelacement entre modules de persistance associée à des objets géométriques est « continue » en un sens à préciser. La réponse est donnée par les théorèmes « de stabilité », qui justifient l'utilisation des modules de persistance dans les applications associées aux exemples 1.1.7 et 1.1.8.

On commence par les modules de persistance associés aux sous-niveaux d'une fonction. On dira qu'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est p.f.d. si son module de persistance associé  $H_i(X^f)$  est p.f.d.. C'est toujours le cas en pratique pour des fonctions associées à des données finies.

Notons que si  $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ , alors les espaces persistants  $X^f$  et  $X^g$  sont  $\varepsilon$ -entrelacés puisque  $f(x) \leq t$  implique  $g(x) \leq t + \varepsilon$  et symétriquement. Le lemme 1.3.4 et le théorème d'isométrie 1.3.9 impliquent alors le résultat suivant.

**Théorème 1.4.1** (Théorème de Stabilité I). *Soient  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions p.f.d.,  $\mathbf{B}_n(f)$  et  $\mathbf{B}_n(g)$  les code-barres associés à l'homologie persistante en degré  $n$  des leurs sous-niveaux. On a*

$$d_{bn}(\mathbf{B}_n(f), \mathbf{B}_n(g)) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Passons au cas des complexes de Čech Exemple 1.1.8).

Rappelons que si  $K, L$  sont deux sous-espaces compacts d'un espace métrique  $(Y, d)$ , alors leur distance de Hausdorff est

$$d_H(K, L) = \max \left( \max_{x \in K} d(x, L), \max_{y \in L} d(y, K) \right).$$

Si maintenant  $K$  et  $L$  sont des espaces métriques compacts abstraits, on a la généralisation suivante. Appelons plongement isométrique  $(X, d) \rightarrow (Y, d')$  une application continue entre espaces métriques qui est un homéomorphisme sur son image et une isométrie.

**Définition 1.4.2** (Distance de Gromov-Hausdorff). *Soit  $K, L$  deux espaces métriques compacts. Leur distance de Gromov-Hausdorff est*

$$d_{GH}(K, L) = \inf_{Z, \gamma_K, \gamma_L} d_H(\gamma_K(K), \gamma_L(L))$$

où  $\gamma_K, \gamma_L$  sont des plongements isométriques de  $K$  et  $L$  dans un même espace métrique  $Z$ .

La distance de Gromov-Hausdorff que nous donnons ici diffère de certaines conventions par un facteur de 2. Le deuxième théorème de stabilité énonce :

**Théorème 1.4.3** (Théorème de Stabilité II [CSO14]). *Soient  $X, Y$  deux espaces métriques compacts. On note  $\mathbf{B}_n(X)$  et  $\mathbf{B}_n(Y)$  les code-barres associés à l'homologie persistante en degré  $n$  des complexes de Čech associés. Pour tout entier  $n$ , on a*

$$d_{bn}(\mathbf{B}(X), \mathbf{B}(Y)) \leq d_{GH}(X, Y).$$

Les théorèmes de stabilité suggèrent que les petites barres dans un code-barre représentent du bruit, au sens où les changements de topologie (manifestés par la distance de la convergence uniforme ou la distance de Gromov-Hausdorff) ne sont perceptibles que par les grandes barres a priori.

# Chapitre 2

## Homotopie Persistante

Une question naturelle est de savoir si on peut établir des résultats homotopiques sur les espaces persistants, analogues de ceux de la côté homologique.

**Définition 2.0.1.** Pour toute petite catégorie  $\mathcal{I}$  et des foncteurs  $X, Y: \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Top}$ , nous disons qu'une transformation naturelle  $f: X \rightarrow Y$  est une équivalence faible (objet par objet) si  $f_a: X_a \rightarrow Y_a$  est une équivalence d'homotopie faible (induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie) pour tout  $a \in \text{ob } \mathcal{I}$ . Nous notons

$$X \xrightarrow{\sim} Y$$

une équivalence faible objet par objet de  $X$  vers  $Y$ . Nous disons que  $X$  et  $Y$  sont faiblement équivalents, et écrivons  $X \simeq Y$ , s'il existe un zigzag d'équivalences faibles objet par objet

$$\begin{array}{ccccccc} & & W_1 & & \cdots & & W_n \\ & \swarrow^{\simeq} & & \searrow^{\simeq} & & \swarrow^{\simeq} & \searrow^{\simeq} \\ X & & W_2 & & & & W_{n-1} \\ & & & & & & \\ & & & & & & Y. \end{array}$$

Ceci est clairement une relation d'équivalence sur les objets, mais elle est peu maniable. Comme nous l'expliquons dans la section 2.2,  $X \simeq Y$  si et seulement s'il existe un zigzag de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \swarrow^{\simeq} & & \searrow^{\simeq} \\ X & & Y. \end{array}$$

Pour obtenir un résultat homotopique, nous souhaitons identifier une distance  $d$  sur les  $\mathbb{R}$ -espaces satisfaisant les conditions suivantes :

1. *Axiome de stabilité.* Pour tout  $X \in \text{ob } \mathbf{Top}$  et fonctions  $\gamma, \kappa: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$d((X^\gamma(t))_t, (X^\kappa(t))_t) \leq \|\gamma - \kappa\|_\infty,$$

2. *Axiome d'invariance par homotopie.*  $d(X, Y) = 0$  dès que  $X \simeq Y$  (définition 2.0.1).
3. *Axiome de bornitude en homologie.* Pour tout  $i \geq 0$  et espaces persistants  $X, Y$  avec  $H_i X$  et  $H_i Y$  p.f.d.,

$$d_{\text{bn}}(\mathcal{B}(H_i X), \mathcal{B}(H_i Y)) \leq d(X, Y).$$

## 2.1

# DISTANCE D'ENTRELACEMENT D'HOMOTOPIE

La *distance d'entrelacement*  $d_I$  (Définition 1.3.2) au niveau des espaces persistants est stable et bornée en homologie, mais n'est pas invariante par homotopie (considérer  $X = \{0\}_{\mathbb{R}}$  et  $Y = \mathbb{R}_{\mathbb{R}}$ ), et ne satisfait pas (2.1). Nous définissons les *entrelacements d'homotopie* et la *distance d'entrelacement d'homotopie*  $d_{HI}$  sur les espaces persistants en modifiant la définition de  $d_I$  pour imposer l'axiome d'invariance par homotopie.

Nous introduisons maintenant notre généralisation homotopique des entrelacements.

**Définition 2.1.1.** Pour  $\delta \geq 0$ , nous disons que des  $\mathbb{R}$ -espaces  $X$  et  $Y$  sont  $\delta$ -entrelacés par homotopie s'il existe des  $\mathbb{R}$ -espaces  $X' \simeq X$  et  $Y' \simeq Y$  tels que  $X'$  et  $Y'$  sont  $\delta$ -entrelacés.

**Définition 2.1.2.** La distance d'entrelacement d'homotopie entre les espaces persistants  $X$  et  $Y$  est

$$d_{HI}(X, Y) := \inf \{\delta \mid X, Y \text{ sont } \delta\text{-entrelacés par homotopie}\}.$$

**Théorème 2.1.3.**  $d_{HI}$  est une distance sur les espaces persistants satisfaisant les axiomes de stabilité, d'invariance par homotopie et de bornitude en homologie.

*Preuve partielle de 2.1.3.* Il est clair que  $d_{HI}$  est symétrique et non négative, et que pour tout espace persistant  $X$ ,  $d_{HI}(X, X) = 0$ . Pour établir que  $d_{HI}$  est une distance, il suffit alors de vérifier que  $d_{HI}$  satisfait l'inégalité triangulaire ; nous vérifions ceci dans la section 2.3 ci-dessous.

Il est facile de vérifier que  $d_{HI}$  est stable et invariante par homotopie. Une équivalence faible entre espaces persistants  $X, Y$  induit un 0-entrelacement entre  $H_i X, H_i Y$ , et comme noté précédemment, un  $\delta$ -entrelacement entre  $X, Y$  induit un  $\delta$ -entrelacement entre  $H_i X, H_i Y$ . À partir de ces observations, de l'inégalité triangulaire pour  $d_I$  sur les modules de persistance, et du théorème 1.3.9, nous avons que  $d_{HI}$  est bornée en homologie.  $\square$

Alors qu'il est trivial de montrer que  $d_I$  satisfait l'inégalité triangulaire, notre preuve de l'inégalité triangulaire pour  $d_{HI}$  nécessite du travail. Notre argument revient à montrer que certaines des applications internes dans une certaine extension de Kan sont des équivalences d'homotopie faibles. Étant donné l'inégalité triangulaire pour  $d_{HI}$  et le théorème de stabilité algébrique, le reste de la preuve du théorème 2.1.3 est trivial.

Nous remarquons que théorème 1.4.3 peuvent être formulés au niveau des espaces en utilisant la distance d'entrelacement d'homotopie, pour toute distance satisfaisant nos axiomes de stabilité et d'invariance par homotopie.

**Théorème 2.1.4.** Pour toute distance stable et invariante par homotopie sur les espaces persistants, pour tous espaces métriques  $P$  et  $Q$ ,

$$d(\check{\mathcal{C}}(P), \check{\mathcal{C}}(Q)) \leq d_{GH}(P, Q). \quad (2.1)$$

Les théorèmes 2.1.4 et 2.1.3 nous disent alors en particulier que  $d_{HI}$  satisfait (2.1).

## 2.2

# UN PEU DE THÉORIE DES CATÉGORIES

Dans cette section, nous passons brièvement en revue les idées standards de la théorie des catégories dont nous aurons besoin dans le reste : les extensions de Kan et les catégories de modèles.

**Définition 2.2.1.** Une extension de Kan (à gauche) d'un foncteur  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{E}$  le long d'un foncteur  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  est un foncteur  $L_G F: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{E}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{E} \\ G \downarrow & \nearrow L_G F & \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

muni d'une transformation naturelle  $\eta: F \Rightarrow L_G F \circ G$  qui est universelle au sens que pour toute autre paire  $(H: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{E}, \gamma: F \Rightarrow H \circ G)$ ,  $\gamma$  se factorise de manière unique par  $\eta$ .

Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est petite et  $\mathbf{E}$  est cocomplète, l'extension de Kan à gauche existe.

**Définition 2.2.2.** Une catégorie de modèles est une catégorie  $\mathcal{C}$  complète et cocomplète, munie de trois collections distinguées de morphismes dans  $\mathcal{C}$ , appelées les équivalences faibles, fibrations et cofibrations, satisfaisant les quatre axiomes ci-dessous. Nous disons qu'une (co)fibration est acyclique si elle est aussi une équivalence faible.

1. Les équivalences faibles contiennent tous les isomorphismes et satisfont la « propriété des 2/3 » : pour des morphismes  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow Z$ , si deux quelconques parmi  $f$ ,  $g$ ,  $g \circ f$  sont des équivalences faibles, alors la troisième l'est aussi.
2. Les équivalences faibles, cofibrations et fibrations sont stables par rétracte ; c'est-à-dire, s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & g \downarrow & & f \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X', \end{array}$$

où les composées horizontales sont l'identité et  $g$  appartient à la classe, alors  $f$  y appartient aussi.

3. Dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

si  $f$  est une cofibration,  $g$  est une fibration, et (au moins) l'une d'elles est acyclique, alors il existe un relèvement  $B \rightarrow X$  qui rend le diagramme commutatif.

4. Tout morphisme dans  $\mathcal{C}$  se factorise fonctoriellement comme composition d'une cofibration suivie d'une fibration acyclique ou composition d'une cofibration acyclique suivie d'une fibration.

Le fait standard suivant nous sera utile dans notre preuve de l'inégalité triangulaire pour  $d_{\text{HI}}$ .

**Proposition 2.2.3** ([DS95, Proposition 3.14]). *Étant donné un carré cocartésien dans  $\mathcal{C}$ ,*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

*si  $f$  est une cofibration (acyclique), alors  $g$  l'est aussi. Le résultat dual (limites inverses et fibrations) est également vrai.*

Puisqu'une catégorie de modèles  $\mathcal{C}$  est complète et cocomplète, elle a un objet initial  $\emptyset$  et un objet final  $*$ . Nous disons que  $X \in \text{ob } \mathcal{C}$  est *cofibrant* si l'unique morphisme  $\emptyset \rightarrow X$  est une cofibration ; dualement, un objet est *fibrant* si l'unique morphisme  $X \rightarrow *$  est une fibration. L'application de l'axiome de factorisation fonctorielle ci-dessus aux morphismes  $\emptyset \rightarrow X$  donne un *foncteur de remplacement cofibrant*  $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  avec chaque  $QX$  cofibrant, et une transformation naturelle  $Q \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$  qui est une fibration acyclique sur chaque objet de  $\mathcal{C}$ .

**Exemple 2.2.4.** *Dans la structure de modèles standard sur  $\mathbf{Top}$ , les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie faibles et les fibrations sont les fibrations de Serre ; les cofibrations sont alors déterminées à partir des fibrations acycliques par les axiomes des catégories de modèles. Dorénavant, les équivalences faibles, fibrations, et cofibrations d'espaces topologiques seront entendues comme celles de la structure de modèles standard. Cette catégorie de modèles est engendrée de manière compacte, où les cofibrations génératrices sont les inclusions de bords  $S^{n-1} \rightarrow D^n$  ; les objets cofibrants sont des rétractes de complexes cellulaires, et les cofibrations dans la structure de modèles standard admettent une description concrète, comme rétractes d'inclusions CW généralisées [DS95].*

**Exemple 2.2.5.** *Pour toute petite catégorie  $\mathcal{I}$ , il existe une structure de catégorie de modèles sur  $\mathbf{Top}^{\mathcal{I}}$ , la structure de modèles projective, pour laquelle les équivalences faibles sont les équivalences faibles objet par objet et les fibrations sont les fibrations objet par objet [Hir09, Section 11.6]. Pour la plupart des choix de  $\mathcal{I}$ , les cofibrations objet par objet ne sont pas nécessairement des cofibrations. Cependant, il est simple de vérifier que si  $X \in \mathbf{Top}^{\mathcal{I}}$  est cofibrant, alors chaque objet dans  $X$  est cofibrant, et chaque application interne dans  $X$  est une cofibration. Tous les objets sont fibrants dans la structure de modèles standard sur  $\mathbf{Top}$ , donc tous les objets de  $\mathbf{Top}^{\mathcal{I}}$  sont fibrants dans la structure de modèles projective.*

**Catégories d'homotopie** On peut construire la *catégorie d'homotopie* associée  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  de toute catégorie de modèles  $\mathcal{C}$  [DS95, Définition 5.6]. La catégorie  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  a la même collection d'objets que  $\mathcal{C}$  et est munie d'un foncteur  $\Pi^{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{C})$  qui est l'identité sur les objets.  $\Pi^{\mathcal{C}}$  est la *localisation* de  $\mathcal{C}$  par rapport aux équivalences faibles [DS95, Théorème 6.2]), c'est-à-dire qu'il envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes, et pour tout foncteur  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ayant cette propriété, il existe un unique foncteur  $G: \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \Pi^{\mathcal{C}} \downarrow & \nearrow G & \\ \text{Ho}(\mathcal{C}) & & \end{array}$$

En particulier, à équivalence de catégories près,  $\text{Ho}(\mathcal{C})$  ne dépend que des équivalences faibles de  $\mathcal{C}$ , et non des (co)fibrations. Nous notons

$$X \xrightarrow{\sim} Y$$

une équivalence faible de  $X$  vers  $Y$ . Nous disons que  $X$  et  $Y$  sont *faiblement équivalents* et écrivons  $X \simeq Y$  si  $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$  sont isomorphes dans  $\text{Ho}(\mathcal{C})$ .

Le fait que  $\Pi^{\mathcal{C}}$  soit une localisation implique que  $X \simeq Y$  si et seulement s'il existe un zigzag d'équivalences faibles dans  $\mathcal{C}$  connectant  $X$  et  $Y$ . Ainsi, deux diagrammes d'espaces sont faiblement équivalents par rapport à la structure de modèles projectifs si et seulement s'ils sont faiblement équivalents au sens de définition 2.0.1. En fait, on peut vérifier que dans toute catégorie de modèles  $\mathcal{C}$ ,  $X \simeq Y$  si et seulement s'il existe un diagramme d'équivalences faibles

$$\begin{array}{ccc} & Z_1 & \\ \simeq \nearrow & & \swarrow \simeq \\ X & & Y. \end{array}$$

De plus, il est facile de vérifier que si soit tous les objets de  $\mathcal{C}$  sont fibrants, soit tous sont cofibrants, alors  $X \simeq Y$  si et seulement s'il existe des équivalences faibles

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \simeq \swarrow & & \searrow \simeq \\ X & & Y. \end{array}$$

En particulier, ceci s'applique à la structure de modèles projectifs, dont tous les objets sont fibrants.

## 2.3

### L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Dans cette section, nous prouvons l'inégalité triangulaire pour  $d_{\text{HI}}$ , complétant ainsi la preuve du théorème 2.1.3. Il suffit de montrer que si  $W$  et  $X$  sont  $\delta$ -entrelacés par homotopie et  $X$  et  $Y$  sont  $\epsilon$ -entrelacés par homotopie, alors  $W$  et  $Y$  sont  $(\delta + \epsilon)$ -entrelacés par homotopie.

**Définition 2.3.1.** Nous définissons une catégorie marquée comme étant une catégorie finie et mince  $\mathcal{I}$  munie d'une application  $m : S \rightarrow [0, \infty)$ , où  $S$  est un sous-ensemble de l'ensemble des paires non ordonnées d'objets isomorphes dans  $\mathcal{I}$ . Pour simplifier la notation, nous écrirons  $m(\{a, b\})$  comme  $m(a, b)$ . Nous notons une paire  $\{a, b\} \in S$  avec  $m(a, b) = \delta$  de la manière suivante :

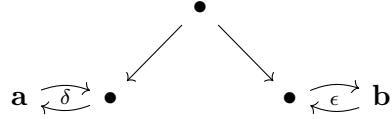
$$a \xleftarrow[\delta]{} b$$

Définissons  $\bar{\mathcal{I}}$ , la catégorie d'entrelacement de la catégorie marquée  $\mathcal{I}$ , comme la catégorie mince avec  $\text{ob } \bar{\mathcal{I}} = \text{ob } \mathcal{I} \times \mathbb{R}$  et  $\text{hom } \bar{\mathcal{I}}$  engendré par l'ensemble de flèches

$$\begin{aligned} & \{(a, r) \rightarrow (b, r) \mid r \in \mathbb{R}, a \rightarrow b \in \text{hom}(\mathcal{I}), \{a, b\} \notin S\} \\ & \cup \{(a, r) \rightarrow (b, r + m(a, b)) \mid r \in \mathbb{R}, \{a, b\} \in S\}. \end{aligned}$$

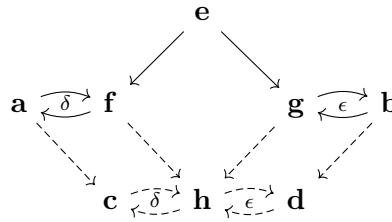
Définissons un diagramme d'espaces persistants indexé par  $\mathcal{I}$  comme un foncteur  $F : \bar{\mathcal{I}} \rightarrow \text{Top}$ .  $F$  se restreint en un  $\mathbb{R}$ -espace  $F_a$  pour chaque  $a \in \text{ob } \mathcal{I}$ , en une transformation naturelle  $F_{a,b} : F_a \rightarrow F_b$  pour chaque  $a \rightarrow b \in \text{hom}(\mathcal{I})$  avec  $\{a, b\} \notin S$ , et en un  $m(a, b)$ -entrelacement entre  $F_a$  et  $F_b$  pour chaque  $\{a, b\} \in S$ .

Soit  $\mathbf{I}$  la catégorie marquée suivante :



Si  $W$  et  $X$  sont  $\delta$ -entrelacés par homotopie et  $X$  et  $Y$  sont  $\epsilon$ -entrelacés par homotopie, alors en utilisant le fait que  $\simeq$  est une relation d'équivalence sur les  $\mathbb{R}$ -espaces, il existe un diagramme  $F$  de  $\mathbb{R}$ -espaces indexé par  $\mathbf{I}$  tel que  $F_a \simeq W$ ,  $F_b \simeq Y$ , et les deux flèches diagonales sont des équivalences faibles. En prenant un remplacement cofibrant de  $F$ , nous pouvons supposer que  $F$  est cofibrant.

Soit  $\mathbf{J}$  l'extension marquée suivante de  $\mathbf{I}$  :



et soit  $\iota : \mathbf{I} \hookrightarrow \mathbf{J}$  l'inclusion de catégories. L'inclusion  $\iota$  induit un foncteur d'inclusion  $\bar{\iota} : \bar{\mathbf{I}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{J}}$ .

Puisque nous supposons  $F$  cofibrant,  $L_{\bar{\mathbf{J}}} F$  calcule l'extension de Kan gauche de  $F$  le long de  $\bar{\iota}$ . Pour établir que  $W$  et  $Y$  sont  $(\delta + \epsilon)$ -entrelacés par homotopie, il suffit de prouver la proposition suivante ; l'entrelacement par homotopie  $(\delta + \epsilon)$  désiré est alors donné par composition.

**Proposition 2.3.2.** *Les morphismes  $L_{a,c} : L_a \rightarrow L_c$  et  $L_{b,d} : L_b \rightarrow L_d$  sont des équivalences faibles.*

*Démonstration.* On montre que  $L_{a,c}$  est une équivalence faible ; l'argument pour  $L_{b,d}$  est le même.

On montre d'abord que pour chaque  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\{(e,r), (f,r), (g,r), (h,r)\}$  est un carré de pushout. Puisque  $F$  est cofibrant, l'application  $F_{(e,r),(g,r)}$  est une cofibration ; par hypothèse, c'est en fait une cofibration acyclique. Ainsi, proposition 2.2.3 implique que  $L_{(f,r),(h,r)}$  est aussi une cofibration acyclique. Ceci est vrai pour tout  $r$ , donc  $L_{f,h}$  est une cofibration acyclique objet par objet.

Le même argument montre que pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\{(\mathbf{a},r), (\mathbf{f},r-\delta), (\mathbf{c},r), (\mathbf{h},r-\delta)\}$  est un carré de pushout. Alors  $L_{a,c}$  est une cofibration acyclique objet par objet car  $L_{f,h}$  l'est.  $\square$

## 2.4

# THÉORÈME DE WHITEHEAD PERSISTANT

Dans cette section, nous considérons l'idée de comparer des objets dans  $\mathbf{Top}^{\mathbb{R}}$  en utilisant des entrelacements dans  $\mathrm{Ho}(\mathbf{Top})^{\mathbb{R}}$ . Nous définissons la distance d'entrelacement dans  $\mathrm{Ho}(\mathbf{Top})^{\mathbb{R}}$  par  $d_{\mathrm{HI}}$  ; d'après le lemme 1.3.4, nous avons  $d_{\mathrm{HI}} \geq d_{\mathrm{HC}}$ . Nous nous demandons si l'inverse de cette inégalité est vrai (à un facteur constant près). Lanari et Scoccola [LS20] donnent une réponse positive.

**Théorème 2.4.1** ([LS20], Théorème A). *Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie de modèles cofibrante générée, et  $X, Y \in \mathcal{M}^{\mathbb{R}}$ , alors  $d_{\mathrm{HI}}(X, Y) \leq 2d_{\mathrm{HC}}(X, Y)$ .*

Une catégorie de modèles est dite cofibrante générée s'il existe un petit *ensemble* de cofibrations ainsi qu'un ensemble de cofibrations acycliques, tels que toutes les autres (co)fibrations (acycliques) sont générées à partir de celles-ci en un certain sens. Des exemples de catégories de modèles cofibrantes générées sont la structure de modèle de Kan-Quillen sur les ensembles simpliciaux et la structure de modèle de Quillen sur les espaces topologiques, cf. [Hov99].

L'exemple suivant montre que le théorème ne tient pas sans l'hypothèse de génération cofibrante.

**Exemple 2.4.2** ([BL23]). *Pour chaque  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , nous définissons*

$$Y_r^n := \begin{cases} \underbrace{S^{2^i} \times S^{2^i} \times \cdots \times S^{2^i}}_{2^{n-i} \text{ copies}} & \text{pour } r \in [2i, 2i+2), i \in \{0, 1, \dots n\} \\ * & \text{pour } r \in (-\infty, 0) \cup [2n+2, \infty), \end{cases}$$

Pour  $i \geq 0$ , nous avons une application

$$S^{2^i} \times S^{2^i} \rightarrow S^{2^{i+1}} = S^{2^i} \wedge S^{2^i},$$

donnée en écrasant  $S^{2^i} \vee S^{2^i} \subset S^{2^i} \times S^{2^i}$  en un point; ici  $\vee$  et  $\wedge$  désignent respectivement le produit en bouquet et le produit smash. Pour  $i \in \{0, 1, \dots n-1\}$ ,  $r \in [2i, 2i+2)$  et  $s \in [2i+2, 2i+4)$ , nous prenons l'application interne  $Y_{r,s}^n$  comme le produit de  $2^{n-i-1}$  copies de cette application. Les autres applications internes dans  $Y^n$  sont spécifiées par composition.

Par exemple, en considérant le tore  $S^1 \times S^1$  comme un quotient d'un carré de la manière usuelle, l'application  $Y_{0,2}^1 : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$  est celle induite en envoyant tout le bord du carré en un seul point, et l'application  $Y_{0,2}^2 : S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^2$  est égale à  $Y_{0,2}^1 \times Y_{0,2}^1$ .

Pour tout  $i$ , l'application  $S^{2^i} \vee S^{2^i} \hookrightarrow S^{2^i} \times S^{2^i}$  induit une surjection sur tous les groupes d'homotopie. Ainsi,  $\pi_i Y_{r,r+2}^n$  est trivial pour tout  $r \in \mathbb{R}$  et  $i \geq 0$ . En définissant  $X'$  par  $X'_r = *$  pour tout  $r$ , il s'ensuit que les morphismes triviaux  $X' \rightarrow Y^n(1)$  et  $Y^n \rightarrow X'(1)$  induisent des 1-entrelacements sur tous les groupes d'homotopie persistants basés.

Cependant,  $X'$  et  $Y^n$  ne sont pas  $\delta$ -équivalents par homotopie pour tout  $\delta < n+1$ . Pour le voir, supposons que toutes les sphères dans la définition de  $Y^n$  sont munies de la structure CW minimale usuelle, et remarquons que  $Y_r^n = S^{2^n}$  pour  $r \in [2n, 2n+2)$ . L'application  $Y_{0,r}^n$  agit en écrasant le  $(2^n - 1)$ -squelette de  $Y_0^n$  en un point, donc il résulte d'un calcul facile d'homologie cellulaire que  $H_{2^n}(Y^n)_{0,r} \neq 0$ . Ainsi,  $H_{2^n}(Y^n)$  et le module trivial  $H_{2^n}(X')$  ne sont pas  $\delta$ -entrelacés. Il est facile de vérifier qu'une  $\delta$ -équivalence d'homotopie entre  $\mathbb{R}$ -espaces  $A$  et  $B$  induit un  $\delta$ -entrelacement entre  $H_i A$  et  $H_i B$  pour tout  $i$ . Par conséquent,  $X'$  et  $Y^n$  ne sont pas  $\delta$ -équivalents par homotopie, comme affirmé. D'autre part,  $X'$  et  $Y^n$  sont strictement  $(n+1)$ -entrelacés, via des morphismes triviaux.

Nous construisons ensuite  $Y'$  tel que les morphismes triviaux  $X' \rightarrow Y'(1)$  et  $Y' \rightarrow X'(1)$  induisent des 1-entrelacements sur tous les groupes d'homotopie persistants basés, mais  $H_i X'$  et  $H_i Y'$  ne sont pas  $\epsilon$ -entrelacés pour aucun  $\epsilon$  fini. Pour ce faire, nous assemblons simplement les parties non triviales de chaque  $Y^n$ , en prenant chaque morphisme entre des espaces de deux  $Y^n$  différents comme trivial; c'est-à-dire, nous prenons  $Y'_r := Y_r^1$  pour  $r \in (-\infty, 4)$ ,  $Y'_r := Y_{r-4}^2$  pour  $r \in [4, 10)$ , et ainsi de suite.

Enfin, nous prenons  $X$  et  $Y$  comme des remplacements cofibrants de  $X'$  et  $Y'$ , respectivement, et soit  $f : X \rightarrow Y(1)$  le remplacement cofibrant de l'application triviale  $X' \rightarrow Y'(1)$ .

# Bibliographie

- [BCB20] M. B. Botnan and W. Crawley-Boevey. Decomposition of persistence modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 148(11) :4581–4596, 2020.
- [BL15] U. Bauer and M. Lesnick. Induced matchings and the algebraic stability of persistence barcodes. *Journal of Computational Geometry*, 6(2) :162–191, 2015.
- [BL23] A. J. Blumberg and M. Lesnick. Universality of the homotopy interleaving distance. *Trans. Am. Math. Soc.*, 376(12) :8269–8307, 2023.
- [CO20] J. Cochoy and S. Oudot. Decomposition of exact pfd persistence bimodules. *Discrete & Computational Geometry*, 63(2) :255–293, 2020.
- [CSO14] F. Chazal, V. De Silva, and S. Oudot. Persistence stability for geometric complexes. *Geometriae Dedicata*, 173(1) :193–214, 2014.
- [DS95] W. G. Dwyer and J. Spalinski. Homotopy theories and model categories. *Handbook of algebraic topology*, 73 :126, 1995.
- [Gin25] G. Ginot. An overview of persistence modules and their applications. *Séminaire Bourbaki. Volume 2023/2024. Exposés 1211–1226*, pages 607–641, 2025.
- [Hir09] P. S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 99. American Mathematical Society, 2009.
- [Hov99] M. Hovey. *Model Categories*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1999.
- [LS20] E. Lanari and L. Scoccola. Rectification of interleavings and a persistent whitehead theorem. *arXiv preprint arXiv :2010.05378*, 2020.