RAPPORT DU PROJET: ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES ANNEAUX FILTRÉS

Théorème de valuation de David Rees

Tuteur: FINSKI Siarhei

Avril 2025

LACOURCELLE Hélie   LE LOUEDEC Mathieu   SAIDI Youssef
YAO Huaizhen   YE Xiaowei

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

IP PARIS

INTRODUCTION

Les filtrations apparaissent dans divers domaines des mathématiques : géométrie différentielle et algébrique, théorie des nombres, algèbre linéaire, etc.

Dans ce rapport sera résumé notre projet scientifique collectif sur les travaux des études asymptotiques des filtrations avec un point de vue algébrique. Plus précisément, on démontre le théorème de valuation de David Rees (le théorème 2).

Donnons maintenant une brève introduction sur ce théorème et son histoire.

Soit A un anneau, une **filtration** sur A est une application $f : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

— $f(x+y) \geqslant \min(f(x), f(y))$ pour tout $x, y \in A$;

— $f(xy) \geqslant f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in A$.

Exemple 1. Voyons quelques exemples de filtration.

— On peut introduire la filtration induite par un idéal I de A :

$$f_I(x) := \max\{\, n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \,|\, x \in I^n \,\}.$$

— Ordre d'annulation : Prenons A l'anneau des fonctions holomorphes sur un voisinage de 0 dans le plan complexe. On définit l'application f en envoyant une fonction h holomorphe autour de 0 à son ordre d'annulation en 0, i.e. $f(h) := \mathrm{ord}_0(h)$. (On envoie la fonction identiquement nulle à $+\infty$.) On peut vérifier que f est une filtration. Cette filtration est induite par i'idéal engendré par la fonction identité $z \mapsto z$.

— Prenons encore A l'anneau des fonctions holomorphes sur un voisinage de 0 dans le plan complexe. Prenons $f' = \min(f, 1)$, alors f' est une filtration.

Pour une filtration f, on a la **fonction de Samuel**

$$f^{\mathrm{hom}} := \lim_{n\to\infty} \frac{f(x^n)}{n}.$$

Cette fonction a été proposée par Pierre Samuel, qui conjectura dans *Some asymptotic properties of powers of ideals* [Sam52] (ouvrage qui marqua le début des études de la théorie asymptotique des idéaux) que celle-ci prenait toujours des valeurs rationnelles dans le cas des filtrations induites par des idéaux. Cette conjecture fut résolue indépendamment par Rees [Ree56] et Nagata [Nag57]. Dans ce projet, on étudie la solution de Rees, qui est le théorème suivant :

Théorème 2 (Rees 1956)**.** *Soient A un anneau noethérien et $I \subset A$ un idéal. Alors il existe de manière unique $r \in \mathbb{N}, e_1, \cdots, e_r \in \mathbb{Q}$ et les valuations surjectives $v_1, \cdots, v_r$ à valeur dans $\mathbb{Z}$, tels que*

$$f_I^{\mathrm{hom}}(x) = \min_{1\leqslant i\leqslant r} \left(\frac{v_i}{e_i}\right)$$

et tels que l'écriture du minimum en termes de ces r valuations est irréductible.

Où une **valuation** est une filtration v positive telle que $v(xy) = v(x) + v(y)$.

Exemple 3. — Dans l'exemple 1, la deuxième filtration (ordre d'annulation) est une valuation, tandis que la troisième n'est pas une valuation.

— Prenons $A = \mathbb{C}[X, Y]$. Pour un polynôme $P \in A$, on considère la restriction sur la courbe $(t, e^t)_{t\in\mathbb{C}}$. Par analycité, on peut l'écrire en suite formelle

$$P(t, e^t) = \sum_{i\geqslant 0} a_i(P)t^i.$$

Définissons $v(P)$ comme l'indice minimale i telle que $a_i(P) \neq 0$. On vérifie bien que c'est une valuation.

— Prenons encore $A = \mathbb{C}[X, Y]$. Pour un polynôme $P \in A$, on écrit $P(X, Y) = \sum_{i,j} a_{i,j}X^iY^j$, on définit $v(P) := \min\{i + 2j : a_{i,j} \neq 0\}$, c'est bien une valuation.

Dans ce rapport, nous verrons plus en détail ces définitions et nous développerons une boîte à outils pour aborder le théorème de Rees. Dans le chapitre 1, nous introduirons les résultats de l'algèbre commutative : nous parlerons notamment d'anneaux et modules noethériens, un concept essentiel de l'algèbre commutative ; ainsi que les définitions d'anneaux et modules gradués, et enfin un critère pour justifier la nothérienité d'un anneau gradué (théorème 1.16). On donne ici une motivation géométrique pour la notion de Noethérienité :

En géométrie algébrique, on peut établir une correspondance entre les idéaux et les sous-ensembles algébriques de la manière suivante. Considérons $\mathbb{P}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \exists i, z_i \neq 0\}/\mathbb{C}^*$ (espace projectif) et prenons I un idéal des polynômes homogènes sur $\mathbb{P}^n$, on lui associe l'ensemble algébrique

$$V(I) := \{z \in \mathbb{P}^n : \forall f \in I, f(z) = 0\}$$

En faisant résonner cette notion avec la noethériennité des anneaux, on a qu'une suite croissante d'idéaux donne une suite décroissante d'ensembles algébriques.

Réciproquement, à un ensemble algébrique X nous associons l'idéal $I(X)$ des polynômes homogènes s'annulant sur X, i.e., $I(X) := \{f \in \mathbb{C}[X_1, X_2, \cdots, X_n] \text{ homogène } : \forall x \in X, f(x) = 0\}$.

Ceci nous permet de visualiser les idéaux de manière géométrique. Par exemple, prenons un ensemble algébrique X non irréductible, c'est-à-dire s'écrivant comme union de deux ensembles strictement plus petits X_1 et X_2, alors nous vérifions facilement que $I(X)$ n'est pas un idéal premier. En effet prenons $f \in I(X_1)\backslash I(X)$, $g \in I(X_2)\backslash I(X)$, alors $fg \in I(X)$. Alors le théorème 1.5 de E. Noether sur les premiers minimaux nous montre que tout ensemble algébrique peut s'écrire comme une union finie d'ensembles algébriques irréductibles.

Dans le chapitre 2, nous parlerons de localisation, des premiers associés et de l'intégralité. Les études de ces conceptions donnent des outils puissants pour la suite. Dans le chapitre 3, nous définirons les filtrations noethériennes, qui seront les objets principaux de notre étude. Dans le chapitre 4 nous parlerons d'anneaux de valuation et d'anneaux de Krull, afin d'énoncer le théorème de Mori-Nagata (théorème 4.15), qui sera un outil important pour démontrer le théorème de Rees ; puis finalement nous réinterprèterons dans le chapitre 5 le théorème de Mori-Nagata en utilisant les valuations de Krull, que l'on définira, et nous pourrons alors démontrer le théorème de Rees.

LISTE DES NOTATIONS

— Anneau : A
— Anneau gradué : G, H, $\cdots$
— Corps : k, C,$\cdots$
— Idéaux : I, J, $\cdots$
— Idéaux premiers : $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\cdots$
— idéaux maximaux : $\mathfrak{m}$
— Spectre d'anneau : $\operatorname{Spec} A$
— Anneau total des fraction : $\operatorname{Frac} A$
— Module : M, N, $\cdots$
— Annihilateur d'un ensemble : $\operatorname{Ann}_A S$
— L'ensemble des annihilateurs de seul élément dans un ensemble : $\operatorname{ann}_A S$
— L'ensemble des premiers associés à un module : $\operatorname{Ass}_A M$
— Filtration : f, g, $\cdots$
— L'ensemble des filtrations à valeurs dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur un anneau : $\operatorname{Fil}_S A$
— L'ensemble des valuations sur un anneau : $\operatorname{Val} A$
— L'équivalence entre deux filtrations : $f \sim g$
— Radical d'un idéal : $\sqrt{I}$
— Clôture intégrale d'une filtration : f^*
— $A_0(f)$: La partie de A sur laquelle f est positive
— La fonction de Samuel de f : f^{hom}
— L'hauteur d'un idéal premier : $\operatorname{ht} \mathfrak{p}$

TABLE DES MATIÈRES

1
NOETHÉRIENITÉ

Dans cette partie, nous introduirons des notions dans l'algèbre commutative qui seront utiles dans notre projet, par exemple, celle de Noethérienité, en suivant (principalement) le livre d'Atiyah-MacDonald [AM94]. Nous parlerons aussi du radical d'un idéal et donnerons son expression comme intersection des idéaux premiers. Enfin, nous discuterons en particulier le cas d'un anneau Noethérien.

Dans la suite de ce chapitre, A sera un anneau commutatif.

1.1 Anneaux et Modules Noethériens

La notion de Noethérienité joue un rôle très important dans l'algèbre. Dans cette partie, nous donnerons les définitions des anneaux et modules noethériens et démontrerons leur équivalence ainsi que quelques résultats connus, notamment le théorème de base de Hilbert (théorème 1.9).

Définition 1.1 (Anneau Noethérien)**.** On dit que A est Noethérien si tous ses idéaux sont de type fini, ou de manière équivalente, toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

Définition 1.2 (Module Noethérien)**.** Soit A un anneau, un A-module M est dit Noethérien si tout sous-module de M est de type fini, ou de manière équivalente, toute suite croissante de sous-modules de M est stationnaire.

Remarque 1.3. Un anneau A est Noethérien si et seulement s'il est Noethérien en tant qu'un A-module car les sous-modules de A sont exactement les idéaux.

Montrons maintenant l'équivalence entre les différentes définitions :

Proposition 1.4. *Soit A un anneau, et soit M un A-module, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout sous-module de M est de type fini.*
2. *Toute suite croissante de sous-modules de M est stationnaire.*
3. *Toute famille non-vide de sous-modules de M admet un élément maximal.*
4. *Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de M, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > m$, on peut écrire f_n comme combinaison linéaire de $f_0, f_1, \cdots, f_m$ avec coefficients dans A.*

Démonstration. Nous démontrons l'équivalence par les implications cycliques suivantes :

$$\boxed{(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)} \quad et \quad \boxed{(1) \Leftrightarrow (4)}$$

(1) ⇒ (2) : Soit $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ une suite croissante de sous-modules. Posons $N = \bigcup_{k\geqslant 1} N_k$. Alors N est un sous-module de M. Par (1), N est engendré par un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_r$. Chaque x_i appartient à un N_{k_i}. Soit $m = \max\{k_i\}$, alors $N \subseteq N_m$ donc $N = N_m$, et la suite stationne.
(2) ⇒ (3) : Par l'absurde, supposons qu'une famille $\mathcal{F}$ n'ait pas d'élément maximal. Alors, on peut construire une suite infinie strictement croissante $N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots$, ce qui contredit (2). Donc $\mathcal{F}$ admet un élément maximal.

(3) ⇒ (1) : Soit $N \subseteq M$ un sous-module. Considérons $\mathcal{F} := \{\text{sous-modules de type fini de } N\}$. On sait que $\mathcal{F}$ est non vide car il contient $\{0\}$. Par (3), il existe un élément maximal $N' \in \mathcal{F}$. Si $N' \neq N$, soit $x \in N \backslash N'$ alors $N' + Ax$ contredit la maximalité de N. On conclut que $N' = N$ donc N est de type fini.
(1) ⇒ (4) : Soit (f_n) une suite dans M. Alors, le sous-module $N = \langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ est de type fini par (1). Soient $g_1, \ldots, g_k$ des générateurs de N, chaque g_i est combinaison linéaire d'un nombre fini de f_n. Soit m le plus grand indice utilisé, alors $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots \in \langle f_0, \ldots, f_m \rangle$.
(4) ⇒ (1) : Par l'absurde, supposons qu'il existe un sous-module N qui n'est pas de type fini. Alors on construit par récurrence une suite (f_n) où $f_{k+1} \notin \langle f_0, \ldots, f_k \rangle$, ce qui contredit (4). Donc N doit être de type fini.
Les implications ci-dessus montrent l'équivalence. □

Cette équivalence nous donne une flexibilité d'utiliser la notion de noethérienité dans ce projet. Voyons par exemple le théorème des premiers minimaux de Noether :

Théorème 1.5 (Théorème des premiers minimaux de Noether)**.** *Soit A un anneau Noethérien et $I \subset A$ un idéal, alors il n'exite qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux (par inclusion) contenant I.*

Remarque 1.6. Ces idéaux sont appelés **les premiers minimaux sur I.**

Démonstration. Considérons la famille $K := \{I \subset A : \text{ le théorème n'est pas vrai}\}$. Il faut montrer que K est vide, supposons le contraire. Alors K admet un élément maximal d'après la noethérienité de A (proposition 1.4(3)), notons I_0 cet élément maximal. I_0 n'est donc pas premier car s'il l'est, il est forcément le seul idéal premier minimal contenant I_0.

Prenons $f, g \in A \backslash I$ tels que $fg \in I$. Alors les premier minimal contenant I_0 contient soit (I_0, f), soit (I_0, g). On en déduit qu'il y a au moins un parmis (I_0, f) et (I_0, g) qui est encore dans K. Cela contredit l'hypothèse que K soit maximal. □

Le théorème suivant est une propriété remarquable des modules Noethériens, il donne une critière de noethérienité en ramenant aux modules "plut petits" :

Théorème 1.7 (Suite exacte courte et Noethérienité)**.** *Soit A un anneau et soit une suite exacte courte des A-modules : $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$. Alors M est Noethérien si et seulement si M' et M'' sont Noethériens. En particulier, les sous-modules et les quotients d'un module Noethérien est encore Noethérien.*

Démonstration. **(⇒) :** Supposons que M est Noethérien, alors tout sous-module N' de M' s'identifie à un sous-module de M, donc est de type fini, donc M' est Noethérien.

Montrons que M'' est Noethérien : Soit $N'' \subseteq M''$ un sous-module. Notons $N = g^{-1}(N'')$ son image réciproque dans M. Puisque M est Noethérien, N est engendré par un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$. Alors $N'' = g(N)$ est engendré par $g(x_1), \ldots, g(x_n)$, donc de type fini.

(⇐) : Supposons M' et M'' Noethériens. Soit $N \subseteq M$ un sous-module. Considérons la suite exacte induite :

$$0 \to N \cap M' \to N \to g(N) \to 0,$$

on a $N \cap M'$ est de type fini car c'est un sous-module de M' et M' est Noethérien. De même, $g(N) \subseteq M''$ est de type fini car M'' est Noethérien.

Soient $\{y_1, \ldots, y_k\}$ des générateurs de $N \cap M'$ et $\{\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m}\}$ des générateurs de $g(N)$. Choisissons des relèvements $z_j \in N$ avec $g(z_j) = \overline{z_j}$. Alors N est engendré par $\{y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_m\}$, donc de type fini. □

Pour des exemples (et contre-exemples) sur la Noethérienité et le théorème 1.7, veuillez consulter annexe A.1. Avec le théorème 1.7, on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.8. *Soient A un anneau Noethérien et M un A-module de type fini, alors M est un A-module Noethérien.*

Démonstration. Montrons d'abord que les modules libres A^n sont Noethériens par récurrence sur $n \geqslant 1$:

Si $n = 1$: A est Noethérien par hypothèse (remarque 1.6).

Supposons que A^n est Noethérien. Alors la suite exacte $0 \to A^n \to A^{n+1} \to A \to 0$ montre que A^{n+1} est Noethérien d'après théorème 1.7. Donc A^n est Noethérien pour tout $n \geqslant 1$.

Supposons maintenant que M est engendré par $m_1, \ldots, m_n$ et considérons le morphisme :

$$\varphi : A^n \to M, \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i m_i,$$

ce morphisme est surjectif, donc donne une suite exacte $0 \to \ker(\varphi) \to A^n \to M \to 0$. Par théorème 1.7, puisque A^n est Noethérien, M est aussi Noethérien, ce qui termine la démonstration. $\square$

On va conclure cette partie avec un résultat célèbre sur la Noethérienité : le théorème de base de Hilbert.

Théorème 1.9 (Théorème de base de Hilbert)**.** *Soit A un anneau Noethérien, alors $A[X]$ est un anneau Noethérien.*

Démonstration. Soit $I \subseteq A[X]$ un idéal. Montrons que I est de type fini. Pour tout $n \geqslant 0$, on définit l'idéal :

$$J_n = \{a \in A : \exists P \in I,\ P = aX^n + (\text{termes de degré } < n)\} \cup \{0\}.$$

On a $J_n \subseteq J_{n+1}$. En effet, si $P = aX^n + (\text{termes de degré } < n)$ est dans I, alors $XP = aX^{n+1} + (\text{termes de degré } < n+1)$ l'est dedans aussi. Et la suite $J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots$ stationne car A est Noethérien. Prenons $m \in \mathbb{N}$ tel que $J_n = J_m$ pour tout $n \geqslant m$.

Pour chaque $0 \leqslant k \leqslant m$: J_k est de type fini comme idéal de A car A est Noethérien, notons $a_{k1}, \ldots, a_{kr_k}$ des générateurs de J_k, et prenons des $f_{ki} \in I$ de degré k avec coefficient du terme de degré plus haut a_{ki}. Notons

$$\mathcal{F} := \{\, f_{ki} \,|\, 0 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant i \leqslant r_k \,\}.$$

Montrons que $\mathcal{F}$ engendre tous les $P \in I$ par récurrence sur $d = \deg(P)$ pour $P \in I$: C'est trivial pour $P = 0$. Pour $d = 1$, si $P \equiv a$ est dans I, alors $a \in J_1$, donc $P = a = \sum \lambda_i a_{di}$ avec $\lambda_i \in A$, donc $\mathcal{F}$ engendre P.

Supposons maintenant que $\mathcal{F}$ engendre tous les éléments de I de degré plus petit que d, alors :

Si $0 \leqslant d \leqslant m$, notons $P = aX^d + \cdots$ avec $a \in J_d$, écrivons donc $a = \sum \lambda_i a_{di}$ avec $\lambda_i \in A$. Alors $P - \sum \lambda_i X^{d-\deg(f_{di})} f_{di}$ est de degré plus petit que d. Et on peut conclure par hypothèse de récurrence.

Si $d > m$, pusque $J_d = J_m$, on a $a = \sum \mu_i a_{mi}$. Alors $P - \sum \mu_i X^{d-m} f_{mi}$ est de degré plus petit que d, et on conclut par hypothèse de récurrence. $\square$

1.2 Radical d'un idéal

Dans cette partie, nous allons introduire le concept de radical, puis donner une expression en terme d' idéaux premiers, et enfin discuter d'un résultat de classification des idéaux selon leurs radicaux dans un anneau Noethérien.

Définition 1.10. Soient A un anneau et $I \subset A$ un idéal, alors

$$\sqrt{I} := \{\, a \in A \,|\, \exists N \in \mathbb{N}_{>0}, a^n \in I \,\}$$

est un idéal de A, appelé le radical de I.

Voici une description du radical par des idéaux premiers qui va nous servir après :

Théorème 1.11. *Soient A un anneau et $I \subset A$ un idéal, notons $\mathcal{P}(I) := \{\, \mathfrak{p} \,|\, \mathfrak{p} \subseteq A$ un idéal et $I \subseteq \mathfrak{p} \,\}$ l'ensemble des idéaux premiers contenant I, on a alors*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(I)} \mathfrak{p}.$$

Démonstration. **Inclusion** $\subseteq$: Soit $a \in \sqrt{I}$. Il existe $n \geqslant 1$ tel que $a^n \in I$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(I)$, on a $I \subseteq \mathfrak{p}$, donc $a^n \in \mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{p}$ est premier, cela implique que $a \in \mathfrak{p}$. Ainsi, a appartient à tous les $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(I)$.
Inclusion $\supseteq$ **:** Supposons qu'il existe $a \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(I)} \mathfrak{p}$ avec $a \notin \sqrt{I}$. Alors $a^n \notin I$ pour tout $n \geqslant 1$.

Considérons la famille d'idéaux $\mathcal{F} = \{ J \subseteq A \,|\, J \text{ idéal}, \ I \subseteq J, \ \forall n \geqslant 1, \ a^n \notin J \}$. Cette famille est non vide car $I \in \mathcal{F}$. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{F}$ admet un élément maximal $\mathfrak{q}$. Montrons maintenant que $\mathfrak{q}$ est premier. En effet, supposons $x \notin \mathfrak{q}$ et $y \notin \mathfrak{q}$. Alors, $\mathfrak{q} + (x) \notin \mathcal{F}$ (par maximalité de $\mathfrak{q}$), donc il existe $n_x \geqslant 1$ tel que $a^{n_x} \in \mathfrak{q} + (x)$. De même, il existe $n_y \geqslant 1$ tel que $a^{n_y} \in \mathfrak{q}+(y)$. Notons $n = n_x+n_y$. Alors, $a^n = a^{n_x}a^{n_y} \in (\mathfrak{q}+(x))(\mathfrak{q}+(y)) \subseteq \mathfrak{q}+(xy)$. Si $xy \in \mathfrak{q}$, on aura $a^n \in \mathfrak{q}$, ce qui contredit $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}$. Donc $xy \notin \mathfrak{q}$, et $\mathfrak{q}$ est premier.

Par construction, $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}(I)$ et $a \notin \mathfrak{q}$, ce qui contredit $a \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(I)} \mathfrak{p}$. On conclut que l'hypothèse $a \notin \sqrt{I}$ est fausse. Donc $\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{P}(I)} \mathfrak{p} \subseteq \sqrt{I}$. □

Voyons un exemple qui illustre la motivation géométrique du concept de radical :

Exemple 1.12. Soit $A = \mathbb{C}[X_1, X_2]$, prenons $f_1 = (X_1 - 1)(X_2 - 3)^2$ et $f_2 = (X_1 - 1)^4(X_2 - 3)$. Notons $f = (X_1 - 1)(X_2 - 3)$, on a $f_1^4 \in (f_2) \subseteq (f)$ et $f_2^2 \in (f_1) \subseteq (f)$, donc $\sqrt{(f_1)} = \sqrt{(f_2)}$. En effet, on constate que $(f) = \sqrt{(f_i)}$ pour $i = 1, 2$. On remarque aussi que le lieu d'annulation de ces trois idéaux coïncident : $V((f_1)) = V((f_2)) = V((f)) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : x_1 = 1 \text{ ou } x_2 = 3\}$.

Cet exemple illustre un phénomène dans la géométrie algébrique, deux idéaux avec le même radical correspondent au même lieu d'annulation, ce qui motive le résultat suivant :

Théorème 1.13. *Soit A un anneau Noethérien, soient I, J deux idéaux de A, alors $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $I^N \subset J$ et $J^N \subset I$.*

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.14. *Soit A un anneau (pas forcément Noethérien), soit $I \subset A$ un idéal tel que $\sqrt{I}$ est de type fini, alors il existe $N \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $(\sqrt{I})^N \subset I$.*

Démonstration. Soient $a_1, \cdots, a_k$ des générateurs de $\sqrt{I}$. Par définition du radical, pour chaque a_i, il existe $n_i \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $a_i^{n_i} \in I$. Posons $N := n_1 + \cdots + n_k$. Tout élément de $(\sqrt{I})^N$ est une combinaison de produits de N éléments de $\sqrt{I}$. En développant, chaque terme contient au moins un $a_i^{n_i}$ (par le principe des tiroirs). Comme $a_i^{n_i} \in I$, chaque terme appartient à I. Ainsi, $(\sqrt{I})^N \subset I$. □

Démonstration du Théorème 1.13. **($\Rightarrow$)** : Si $\sqrt{I} = \sqrt{J}$. Puisque A est Noethérien, $\sqrt{I}$ est de type fini. Par lemme 1.14, il existe N_1 tel que $(\sqrt{I})^{N_1} \subset I$. De même, il existe N_2 tel que $(\sqrt{J})^{N_2} \subset J$. Puisque $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, on a $(\sqrt{I})^{N_1} \subset I \subset \sqrt{I}$ et $(\sqrt{J})^{N_2} \subset J \subset \sqrt{J}$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$, alors $I^N \subset (\sqrt{I})^N \subset J$ et $J^N \subset (\sqrt{J})^N \subset I$.
($\Leftarrow$) : Si $I^N \subset J$ et $J^N \subset I$. On a $\sqrt{I^N} = \sqrt{I}$, donc on a $\sqrt{I} = \sqrt{I^N} \subset \sqrt{J}$. Par symétrie $\sqrt{I} = \sqrt{J}$. □

1.3 Anneaux et Modules Gradués

Dans cette partie, nous aborderons les anneaux et les modules gradués, qui nous seront utiles pour comprendre le comportement des filtrations, notamment les filtrations à valeurs entières.

Définition 1.15. Soit G un anneau, on dit que G est gradué s'il existe une décomposition en somme directe en tant qu'un groupe (additive)

$$G = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} G_n \quad \text{t. q.} \quad G_m \cdot G_n \subset G_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, on note

$$G^+ := \bigoplus_{n\geqslant 0} G_n, \quad G^- := \bigoplus_{n\leqslant 0} G_n.$$

Soient G un anneau gradué et M un G-module, on dit que M est gradué s'il s'écrit comme

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n \quad \text{t. q.} \quad G_m \cdot M_n \subset G_{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Un élément de G_n ou M_n est dit homogène de degré n.

Soient M un module gradué et $N \subset M$ un sous-module. On dit que N est un sous-module gradué si

$$N = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} N \cap M_n.$$

Un idéal $I \subset G$ est dit gradué s'il est gradué en tant que module.

Voici une critière de noethérienité pour les anneaux gradués :

Théorème 1.16 (Samuel, 1953 [Sam53])**.** *Soit G un anneau gradué, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est Noethérien.*
2. *Tout idéal gradué de G est de type fini.*
3. *G_0, G^+, G^- vérifie la condition précédente, et G_n est un G_0-module de type fini pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*
4. *G_0 est Noethérien et il existe des éléments homogènes $x_1, \cdots, x_r$ de degré > 0, et $y_1, \cdots, y_s$ de degré < 0 tels que $G^+ = G_0[x_1, \cdots, x_r], G^- = G_0[y_1, \cdots, y_s]$.*

Remarque 1.17. Un exemple d'anneau gradué sera l'anneau de polynôme $A[X]$. Plus généralement, on peut parler des anneaux H-gradué, où H est un groupe abélien, le cas $H = \mathbb{Z}^n$ correspond à l'exemple $A[X_1, \cdots, X_n]$. On peut trouver une généralisation du théorème de Samuel ci-dessus dans le cadre des anneaux H-gradués due à Goto-Yamagishi dans [GY83].

Démonstration. Nous démontrons l'équivalence par les implications cycliques suivantes :

$$\boxed{(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)}$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Si G est noethérien, tout idéal (gradué ou non) est de type fini par définition.

(2) $\Rightarrow$ (3). *Montrons que G_0 est Noethérien :* Soit $\mathfrak{a} \subseteq G_0$ un idéal. Considérons l'idéal gradué $I = \mathfrak{a}G$. Par (2), I est de type fini. Les générateurs peuvent être choisis dans dans $\mathfrak{a}$, ce qui montre que $\mathfrak{a}$ est de type fini, donc G_0 est Noethérien.

Montrons maintenant que G_n est un G_0-module de type fini : Fixons $n \in \mathbb{Z}$. Considérons $I = G_nG$ est de type fini par (2), les générateurs peuvent être choisis dans G_n et ils engendrent donc G_n. G_n est ainsi un G_0-module de type fini.

Vérifions enfin que G^+ et G^- vérifient la condition de (2) : Pour tout idéal gradué $I^+ \subseteq G^+$, on considère l'idéal gradué $I = I^+G$ de G, qui est de type fini par (2), supposons qu'il est engendré par $a_1, a_2, \cdots, a_k$. Notons

$$m := \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \deg(a_i),$$

tous les éléments de I de degré au moins m sont donc engendré par $a_1, a_2, \cdots, a_k$. Pour $n < m$, $I \cap G_n$ est un G_0-sous-module de G_n, que l'on a montré Noethérien, on conclut que $I \cap G_n$ est de type fini et donc I est de type fini, engendré par $a_1, a_2, \cdots, a_k$ et les générateurs de $I \cap G_n, 0 \leqslant n < m$.

Le raisonnement pour G^- est analogue.

(3) $\Rightarrow$ (4). Pour G^+ : considérons $\mathfrak{g}^+ \subseteq G^+$ l'idéal engendré par les éléments homogènes de degré strictement positif. Cet idéal est de type fini par (3), et les générateurs peuvent être choisis homogènes de degré strictement positif, d'où le résultat. Le raisonnement pour G^- est analogue.

(4) $\Rightarrow$ (1). On a d'après (4) que $G = G_0[x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s]$ qui est un quotient d'un anneau de polynôme sur G_0 avec $r + s$ variables libres. Puisque G_0 est Noethérien, G l'est aussi d'après le théorème de base de Hilbert (théorème 1.9) et lemme A.4. $\square$

Terminons cette section avec deux résultats qui vont nous servir après :

Théorème 1.18. *Soient G un anneau gradué, M un G-module gradué, et $I \subset G$ un idéal (pas forcément gradué). Supposons qu'il existe $m' \in M \backslash \{0\}$ tel que $Im' = 0$, alors il existe $m \in M \backslash \{0\}$ homogène tel que $Im = 0$. Par conséquence, notons I' l'idéal gradué minimal contenant I, on a alors $I'm = 0$.*

Démonstration. Soit $N = \{ m \in M \mid I \cdot m = 0 \}$. Par hypothèse, $N \neq \{0\}$ car $m' \in N$. Soit

$$m' = \sum_{d \in \mathbb{Z}} m_d \in N$$

avec $m_d \in M_d$. Pour tout $a \in I$:

$$a \cdot m = \sum_{d \in \mathbb{Z}} a \cdot m_d = 0.$$

Par graduation de M, prenons a' le composant homogène de a avec le plus grand degré, alors chaque terme $a' \cdot m_d$ appartient à $M_{\deg(a')+d}$. Donc $a' \cdot m_d = 0$ pour le plus grand d, et ainsi pour tout d par un argument de récurrence, cela implique $m_d \in N$. Donc N est gradué, il contient donc un élément homogène non nul $m \in N \cap M_d$ pour certain d.

I' est engendré par des composantes homogènes des éléments $a \in I$, donc $I' \cdot m = 0$. □

Théorème 1.19 (Évitement des premiers, version graduée)**.** *Soit G un anneau gradué et H un sous-anneau gradué. Supposons que $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ sont des idéaux premiers tels que pour tout i, il existe $x_i \notin H$ homogène de degré > 0. Alors il existe $x \in H$ tel que $x \notin \mathfrak{p}_i$ pour tout i.*

Démonstration. Par récurrence sur r, Le cas de base $r = 1$ est trivial. Supposons que le résultat est vrai pour $r - 1$ premiers, considérons le cas de r premiers. Par hypothèse de récurrence, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe $y_i \in H$ homogène tel que $y_i \notin \mathfrak{p}_j$ pour $j \neq i$. S'il existe un i tel que $y_i \in \mathfrak{p}_i$, alors prenons $x = y_i$; si pour tout i, on a $y_i \in \mathfrak{p}_i$, supposons sans perte de généralité que $\deg(x_i) = \deg(y_i)$ (sinon on remplace avec leurs certaines puissances) et prenons

$$x := \sum_{i=1}^{r} x_i \prod_{j \neq i} y_j.$$

□

En considérant l'anneau A comme un anneau gradué concentré en degré 0, on obtient

Théorème 1.20 (Évitement des premiers, version non-graduée)**.** *Soit $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} A$, et J un sous-anneau de A (non nécessairement unitaire). Si $J \subset \bigcup_j \mathfrak{p}_j$, alors il existe j tel que $J \subset \mathfrak{p}_j$.*

Corollaire 1.21. *Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A ; soit $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} A$ et $a \in A$.*

Si $aA + I \not\subset \mathfrak{p}_i$ pour tout i, alors il existe $x \in I$ tel que $a + x \notin \bigcup_i \mathfrak{p}_i$.

2
LOCALISATION, PREMIER ASSOCÉ ET CLÔTURE INTÉGRALE

2.1 Localisations

Dans le cadre du théorème de Rees, il est nécessaire de définir et de donner quelques propriétés sur les localisation, chose à laquelle nous nous attellerons dans cette partie.

Définition 2.1 (Localisation)**.** Soit un anneau A, un A-module M, et un sous-ensemble $U \subseteq A$ fermé multiplicativement. Nous définissons la localisation de M à U, notée $M[U^{-1}]$ ou $U^{-1}M$, comme l'ensemble des classes d'équivalence de paires (m, u) avec $m \in M$ et $u \in U$, où la relation d'équivalence est définie par $(m, u) \sim (m', u')$ si et seulement s'il existe un élément $v \in U$ tel que $v(u'm - um') = 0$ dans M. La classe d'équivalence de (m, u) est notée $\frac{m}{u}$. Nous équipons $M[U^{-1}]$ de la structure d'un A-module en définissant les opérations suivantes :

$$\frac{m}{u} + \frac{m'}{u'} = \frac{u'm + um'}{uu'}, \quad r\left(\frac{m}{u}\right) = \frac{rm}{u}$$

pour $m, m' \in M$, $u, u' \in U$ et $r \in A$. Il est à noter que $\frac{u'm}{u'u} = \frac{m}{u}$, et l'inverse additif de $\frac{m}{u}$ est $\frac{-m}{u}$, comme on pourrait s'y attendre. La localisation est équipée d'un morphisme naturel de A-modules $M \to M[U^{-1}]$ qui envoie m vers $\frac{m}{1}$.

Exemple 2.2.
— Soit $u \in A \backslash \{0\}$, alors $U(u) := \{u^n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fermé multiplicativement, on écrit $A_{(u)}$ pour la localisation $A[U(u)^{-1}]$.
— Prenons un idéal premier $\mathfrak{p}$, l'ensemble $U_\mathfrak{p} := A \backslash \mathfrak{p}$ est fermé multiplicativement, et on peut donc prendre la localisation $M_{U_\mathfrak{p}}$ d'un A-module A à $U_\mathfrak{p}$, on le notera $M_\mathfrak{p}$ pour simplicité.

Remarque 2.3. Nous pouvons écrire

$$A_\mathfrak{p} := \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in A,\ s \in A \backslash \mathfrak{p} \right\}$$

On va expliquer la raison du terme "localisation" :

Définition 2.4. Un anneau A est dit local s'il admet un seul idéal maximal, ou de manière équivalente, si ses éléments non inversible forment un idéal.

Proposition 2.5. *Soient A un anneau et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Alors $A_\mathfrak{p}$ est local avec $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ son idéal maximal.*

Démonstration. Si $x \in A_\mathfrak{p} \backslash \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, alors x s'écrit a/s avec $a, s \notin \mathfrak{p}$ donc comme $a \notin \mathfrak{p}$, x est inversible dans $A_\mathfrak{p}$. □

Le but de ce chapitre sera notamment de démontrer la propositon suivante, importante puisque nous travaillons dans le cadre des anneaux noethériens :

Proposition 2.6. *Une localisation d'un anneau noethérien est noethérienne.*

Pour cela, montrons au préalable quelques résultats intermédiaires.

Remarque 2.7. Il est pratique d'étendre un peu la notation : si $U \subseteq A$ est un ensemble arbitraire, et $U^* \subseteq A$ est l'ensemble fermé multiplicativement de tous les produits d'éléments de U, alors nous posons $M[U^{-1}] := M[U^{-1}]$.

Si nous appliquons la définition dans le cas où $M = A$, la localisation résultante est un anneau, avec la multiplication définie par

$$\left(\frac{r}{u}\right)\left(\frac{r'}{u'}\right) = \frac{rr'}{uu'},$$

et en fait $M[U^{-1}]$ est un $A[U^{-1}]$-module avec l'action définie par

$$\left(\frac{r}{u}\right)\left(\frac{m}{u'}\right) = \frac{rm}{uu'}$$

pour $r \in A$, $m \in M$ et $u, u' \in U$.

Proposition 2.8. *Soit U un ensemble fermé multiplicativement de A, et soit M un A-module. Un élément $m \in M$ va à 0 dans $M[U^{-1}]$ (c'est-à-dire $m/1 = 0$) si et seulement si m est annulé par un élément $u \in U$. En particulier, si M est de type fini, alors $M[U^{-1}] = 0$ si et seulement si M est annulé par un élément de U.*

Démonstration. La première affirmation est immédiate à partir de la définition. Pour la deuxième, notons que si les générateurs $m_i \in M$ sont annulés par des éléments $u_i \in U$, alors M est annulé par le produit des u_i. □

Pour le reste de cette section, A sera un anneau, U un sous-ensemble fermé multiplicativement, et M un A-module.

Proposition 2.9. *Soit $\varphi : A \to A[U^{-1}]$ le morphisme naturel $r \mapsto \frac{r}{1}$. Pour tout idéal $I \subseteq A[U^{-1}]$, nous avons $I = \varphi^{-1}(I)A[U^{-1}]$.*

Démonstration. L'inclusion $I \subseteq \varphi^{-1}(I)A[U^{-1}]$ est évidente et l'inclusion réciproque suit parce que pour tout élément $\frac{r}{u} \in I$, avec $r \in A$ et $u \in U$, l'élément r est dans $\varphi^{-1}(I)$. □

Nous pouvons alors démontrer le résultat voulu au début de la section :

Démonstration de proposition 2.6. Si $I \subseteq A[U^{-1}]$ est un idéal, alors, d'après la proposition proposition 2.9, $I = \varphi^{-1}(1)A[U^{-1}]$, ainsi I est engendré par les images dans $A[U^{-1}]$ d'un ensemble de générateurs de $\varphi^{-1}(1)$. Si A est Noetherien, alors $\varphi^{-1}(1)$ est de type fini, donc I l'est aussi. □

On conclut cette partie par un résultat très classique dont on aura besoin :

Théorème 2.10. *Les deux applications envoient, respectivement, un idéal I de A disjoint de U à l'idéal $IA[U^{-1}]$ de $A[U^{-1}]$, et un idéal J de $A[U^{-1}]$ à $\varphi^{-1}(J)$ sont inverse l'une de l'autre, et donnent une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux de $A[U^{-1}]$ et l'ensemble des idéaux de A disjoints de U. Elles envoient les idéaux premiers aux idéaux premiers.*

Démonstration. Par dénition, on peut vérifier sans peine que, soit $I \subseteq A$ un idéal disjoint de U, alors $IA[U^{-1}]$ est un idéal de $A[U^{-1}]$; et inversement, pour tout idéal $J \subseteq A[U^{-1}]$, $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de A disjoint de U.

D'après proposition 2.9, il reste à montrer que $\varphi^{-1}(IA[U^{-1}]) = I$. En effet, si $a \in \varphi^{-1}(IA[U^{-1}])$, alors $\frac{a}{1} \in IA[U^{-1}]$, donc $a \in I$ car I est disjoint de U.

Soit maintenant $\mathfrak{p} \subseteq A$ un idéal premier disjoint de U. Alors $\mathfrak{p}A[U^{-1}]$ est premier dans $A[U^{-1}]$. En effet, si $\frac{a}{u} \cdot \frac{b}{v} \in \mathfrak{p}A[U^{-1}]$, alors $ab \in \mathfrak{p}$, donc $a \in \mathfrak{p}$ ou $b \in \mathfrak{p}$.

Réciproquement, si $\mathfrak{q} \subseteq A[U^{-1}]$ est premier, alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ est premier dans A. Si $ab \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, alors $\frac{ab}{1} \in \mathfrak{q}$, donc $\frac{a}{1} \in \mathfrak{q}$ ou $\frac{b}{1} \in \mathfrak{q}$, i.e. $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ou $b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Donc les applications $I \mapsto IA[U^{-1}]$ et $J \mapsto \varphi^{-1}(J)$ sont des bijections inverses préservant les idéaux premiers. □

2.2 Premier associé

Dans cette section, A sera un anneau commutatif quelconque, et M sera un A-module quelconque. Notons $\operatorname{Spec} A$ l'ensemble des idéaux premiers de A, i.e.,

$$\operatorname{Spec} A \coloneqq \{\, \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ est un idéal premier de } A \,\}$$

on l'appele le **spectre** de A. Soit I un idéal de A, et on écrit $\pi\colon A \to A/I$ la projection canonique. On sait que π^{-1} est une bijection entre les idéaux de A/I et les idéaux de A qui contiennent I, ainsi qu'une bijection entre les idéaux premiers de A/I et ceux de A qui contiennent I, donc on considère $\operatorname{Spec}(A/I)$ comme un sous-espace (ou un sous-ensemble) de $\operatorname{Spec} A$.

Soit A_0 un sous-anneau de A.

Définition 2.11. Soit I un idéal de A_0 et S un sous-ensemble de A. On définit le **quotient d'idéal** de I par S dans A comme

$$(I :^{A}_{A_0} S) \coloneqq \{\, x \in A \mid xS \subset I \,\}.$$

Cela est manifestement un A_0-module. En particulier, si $A_0 = A$, alors, dans le cas où cela ne prête pas à confusion, on note $(I : S) = (I :^{A}_{A} S)$.

Quand $S = \{a\}$ est un ensemble singleton, nous notons $(I : a) = (I : S)$.

Définition 2.12. Pour un idéal I de A_0, on écrit

$$I^{(n)} = \begin{cases} I^n, & \text{si } n > 0, \\ A_0, & \text{si } n = 0, \\ (A_0 :^{A}_{A_0} I^{-n}), & \text{si } n < 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad I^{(-\infty)} = \cup_{\mathbb{Z}} I^{(n)}.$$

On a évidemment $I^{(m)}I^{(n)} \subset I^{(m+n)}$ pour $m, n \in \mathbb{Z}$. Mais il faut faire attention que généralement $I^{(-n)} \neq (I^{(-1)})^n$ pour $n > 0$.

Définition 2.13. Pour tout $m \in M$, on définit l'**annulateur** de m par $\operatorname{Ann}_A m \coloneqq \{\, a \in A \mid am = 0 \,\}$. Pour tout sous-ensemble $S \subseteq M$, on définit $\operatorname{ann}_A S \coloneqq \{\, \operatorname{Ann}_A m \mid m \in S\backslash\{0\} \,\}$ et on définit l'**annulateur** de S par

$$\operatorname{Ann}_A S \coloneqq \bigcap_{I \in \operatorname{ann}_A S} I = \{\, a \in A \mid am = 0 \text{ pour tout } m \in S \,\}.$$

Nous énumérons les propriétés fondamentales suivantes :

Proposition 2.14. *Soit I, J, K des idéaux de A, alors*

(1) $KJ \subset I$ *s.s.i.* $K \subset (I : J)$.
(2) $(I : J) = \operatorname{Ann}_A((I + J)/I)$.
(3) $J \subset I$ *s.s.i.* $(I : J) = A$.
(4) $(I : A) = I$.
(5) $(I : JK) = ((I : J) : K)$.
(6) $(I : (J + K)) = (I : J) \cap (I : K)$.
(7) $(I \cap J : K) = (I : K) \cap (J : K)$
(8) Si A est intègre, alors $(I : (a)) = \frac{1}{a}(I \cap (a))$ *(dans* $\operatorname{Frac} A$*) pour tout* $a \in A$.

Démonstration. (1) Si $KJ \subset I$, alors pour tout $k \in K$ et $j \in J$, $kj \in I$. Ainsi, $kJ \subset I$, donc $k \in (I : J)$. Réciproquement, si $K \subset (I : J)$, alors $KJ = (kj : k \in K, j \in J) \subset I$.

(2) Notons $M = (I + J)/I \cong J/(I \cap J)$. Un élément $x \in A$ annihile M s.s.i. $xJ \subset I$, ce qui correspond exactement à la définition de $(I : J)$.

(3) Si $J \subset I$, alors $1 \cdot J = J \subset I$, donc $1 \in (I : J)$, ceci implique $A = (I : J)$. Réciproquement, si $(I : J) = A$, alors $1 \in (I : J)$, donc $J = 1 \cdot J \subset I$.

(4) Par définition, $x \in (I : A) \iff xA \subset I$. Comme I est un idéal, $x \in I \iff xA \subset I$.

(5) Soit $x \in (I : JK)$. Alors $xJK \subset I$, donc $xK \subset (I : J)$, d'où $x \in ((I : J) : K)$, donc $(I : JK) \subseteq ((I : J) : K)$. Inversement, si $x \in ((I : J) : K)$, alors $xK \subset (I : J)$, donc $xKJ \subset I$, soit $x \in (I : JK)$, donc $(I : JK) \supseteq ((I : J) : K)$.

(6) $x \in (I : (J + K)) \iff x(J + K) \subset I \iff xJ \subset I$ et $xK \subset I \iff x \in (I : J) \cap (I : K)$.

(7) $x \in (I \cap J : K) \iff xK \subset I \cap J \iff xK \subset I$ et $xK \subset J \iff x \in (I : K) \cap (J : K)$.

(8) Soit $x \in (I : (a))$. Alors $xa \in I \cap (a)$, donc $x = \frac{xa}{a} \in \frac{1}{a}(I \cap (a))$. Réciproquement, si $x = \frac{y}{a}$ avec $y \in I \cap (a)$, alors $xa = y \in I$, donc $x \in (I : (a))$. □

Proposition 2.15. *Soit* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ *et* $S \subset A$ *tel que* $S \backslash \mathfrak{p} \neq \varnothing$, *alors* $(\mathfrak{p} : S) = \mathfrak{p}$.

Démonstration. C'est évident que $\mathfrak{p} \subset (\mathfrak{p} : S)$. Pour l'autre sens, on prend $s \in S \backslash \mathfrak{p}$, alors $(\mathfrak{p} : S)s \subset \mathfrak{p}$, mais $\mathfrak{p}$ est premier, donc $(\mathfrak{p} : S) \subset \mathfrak{p}$. □

Proposition 2.16. *Soit* I *un idéal de* A *et* S *un sous-ensemble de* A. *On écrit* $\pi \colon A \to A/I$ *la projection canonique, alors* $\operatorname{Ann} \pi(S) = (I : S)$.

Démonstration. On remarque que $a\pi(S) = 0$ ssi $aS \subset I$ pour tout a. □

Définition 2.17. Un module M est dit **fidèle** si $\operatorname{Ann} M = 0$.

Définition 2.18. On définit $\operatorname{Ass}_A M \coloneqq \operatorname{ann}_A M \cap \operatorname{Spec} A$, ses éléments sont appelés les **idéaux premiers associés** à M. S'il n'y a pas de risque de confusion, on abrégera $\operatorname{Ass}_A M$ en $\operatorname{Ass} M$.

Exemple 2.19. Si A est intgre, et $I \neq 0$ est un idéal de A, alors $\operatorname{Ass}_A I = \{0\}$.

Proposition 2.20. *Soit* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, *alors* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ *ssi* $A/\mathfrak{p}$ *est un sous-module de* M.

Démonstration. Si $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} m \in \operatorname{Ass} M$, on définit

$$\begin{aligned} \phi \colon A &\to M, \\ a &\mapsto am, \end{aligned}$$

alors $\mathfrak{p} = \ker \phi$, donc $A/\mathfrak{p}$ est un sous-module de M.

Réciproquement, si $A/\mathfrak{p}$ est un sous-module de M, alors $1 + \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p} \subset M$, et alors

$$\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(1 + \mathfrak{p}) \in \operatorname{Ass} M.$$ □

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.21. *Soit* A *un anneau noethérien, et* M *un* A*-module de type fini, alors*

(a) $0 < |\operatorname{Ass} M| < \infty$.

(b) On a évidemment $\operatorname{Ann} M \subseteq \mathfrak{p}$ *pour tout* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$. *Réciproquement, si* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A/\operatorname{Ann} M) \subset \operatorname{Spec} A$ *est minimal dans* $\operatorname{Spec}(A/\operatorname{Ann} M)$, *alors* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$.

(c) On a

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M} \mathfrak{p} = \bigcup_{I \in \operatorname{ann} M} I = \{0\} \cup \{\textit{diviseurs-de-zéro de } M\}.$$

(d) Ass *commute avec localisation, c'est-à-dire que pour tout ensemble multiplicatif* S *de* A, *on a*

$$\operatorname{Ass}_{S^{-1}A} S^{-1}M = \left\{ S^{-1}\mathfrak{p} \,\middle|\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A M \textit{ tel que } \mathfrak{p} \cap S = \varnothing \right\}.$$

Nous allons d'abord démontrer (d) :

Démonstration de théorème 2.21 (d). Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A M$ tel que $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$, alors $A/\mathfrak{p}$ est un sous-module de M, et donc $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}$ est un sous-module de $S^{-1}M$. Puisque $S^{-1}\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$, en utilisant proposition 2.20, on sait que $S^{-1}\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_{S^{-1}A} S^{-1}M$.

Soit $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_{S^{-1}A} S^{-1}M$, alors il existe un unique $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tel que $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$ et $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Puisque les éléments de S sont inversibles dans $S^{-1}A$, alors il existe $m \in M$ tel que $\mathfrak{q} = \operatorname{Ann}_{S^{-1}A} m$. Étant donné que A est noethérien, on peut supposer que $\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_n)$. Comme $\frac{a_i}{1} \in \mathfrak{q} = \operatorname{Ann}_{S^{-1}A} m$, il existe $s_1, \ldots, s_n \in S$ tels que $s_i a_i m = 0$. On prend $s = \prod s_i$. D'une part, c'est évident que $\mathfrak{p} \subset \operatorname{Ann}_A(sm)$; d'autre part, si $a \in \operatorname{Ann}_A(sm)$, alors $as \in \mathfrak{q} = S^{-1}\mathfrak{p}$, donc $a \in \mathfrak{p}$, donc on a $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_A(sm) \in \operatorname{Ass}_A M$. □

Proposition 2.22. *Si I est un maximal de* $\operatorname{ann} M$*, alors* $I \in \operatorname{Ass} M$*.*

Démonstration. Soit $I = \operatorname{Ann}_A m$ maximal dans $\operatorname{ann} M$. Supposons $ab \in I$ avec $a, b \notin I$. Alors $abm = 0$ mais $am \neq 0$. L'annulateur $J = \operatorname{Ann}_A(bm)$ contient I et a, ce qui contredit la maximalité de I. Donc I est premier, i.e. $I \in \operatorname{Ass} M$. □

Corollaire 2.23. *Si A est noethérien, alors* $\operatorname{Ass} M \neq \varnothing$*.*

Démonstration. Comme A est noethérien, l'ensemble $\operatorname{ann} M$ admet un élément maximal, qui est dans $\operatorname{Ass} M$ par la proposition 2.22. Donc $\operatorname{Ass} M \neq \varnothing$. □

Cet corollaire nous permet de prouver théorème 2.21 (b) et (c) :

Démonstration du théorème 2.21 (b) et (c). (b) D'après théorème 2.21 (d), en localisant A en $\mathfrak{p}$, on peut supposer sans perte de généralité que A est local avec l'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Par corollaire 2.23, on sait que $\operatorname{Ass} M \neq \varnothing$, mais $\mathfrak{p}$ est l'unique idéal premier contenant $\operatorname{Ann} M$ car $\mathfrak{p}$ est minimal et maximal, donc $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$.

(c) Soit $a \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$, alors il existe $m \in M$ tel que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} m$, donc $am = 0$, i.e. $a \in \bigcup \operatorname{ann} M$.
Soit $a \in \bigcup \operatorname{ann} M$, alors il existe $m \in M$ tel que $a \in \operatorname{Ann} m$. Puisque A est noethérian, il existe un maximal $\mathfrak{p}$ de $\operatorname{ann} M$ qui contient $\operatorname{Ann} m$, donc $a \in \mathfrak{p} \subset \operatorname{Ass} M$ par proposition 2.22. □

Corollaire 2.24. *Si A est noethérian, alors pour tout idéal I de A, on a*

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A/I)} = \bigcup_{y \in A} (I : y).$$

Démonstration. Prenons $M = A/I$ et appliquons théorème 2.21(c), on a

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A/I)} \mathfrak{p} = \bigcup_{J \in \operatorname{ann}(A/I)} J = \bigcup_{\bar{y} \in A/I} \operatorname{Ann}_A \bar{y} = \bigcup_{\bar{y} \in A/I} (I : y) = \bigcup_{y \in A} (I : y).$$

□

Corollaire 2.25. *Soit A un anneau noethérien. En prenant $M = A$, d'après théorème 2.21, on a*

(a) A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux ;

(b) On a d'après théorème 2.21(c)

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A} \mathfrak{p} = \{0\} \cup \{\textit{diviseurs-de-zéro de } A\};$$

(c) si un idéal I de A est constitué uniquement de 0 et de diviseurs de zéro, alors il existe $a \in A$ non nul tel que $I \subset \operatorname{Ann} a$.

Démonstration. (a) et (b) sont directes d'après théorème 2.21(a) et (c) respectivement.

Pour montrer (c), appliquons d'abord théorème 2.21(c), on obtient que I est couvert par un nombre fini d'idéaux premiers :

$$I \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A} \mathfrak{p}$$

et le résultat s'en suit par l'évitement des idéaux premiers (théorème 1.20). □

Proposition 2.26. *Soit A est noethérian et I un idéal de A. Si $I \setminus \operatorname{ann} A \neq \varnothing$, alors, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A/I)$, il existe $a \in A \setminus \operatorname{ann} A$ tel que $\mathfrak{p} = (I : a)$.*

Démonstration. On écrit $\operatorname{Ass} A = \{ \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n \}$ et on prend $a_0 \in A$ tel que

$$\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(a_0 + I) = (I : a_0).$$

Puisque $I \setminus \operatorname{ann} A \neq \varnothing$, on a $I \not\subset \mathfrak{q}_i$ pour tout i, alors, d'après corollaire 1.21, il existe $x \in I$ tel que

$$a_0 + x \notin \bigcup_i \mathfrak{q}_i = \operatorname{ann} A.$$

On prend $a = a_0 + x$ et on a évidemment $\mathfrak{p} = (I : a_0) = (I : a)$. ☐

Lemme 2.27. *(i) Si $M = M' \oplus M''$ alors $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Ass} M' \cup \operatorname{Ass} M''$.*
(ii) Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est exact, alors $\operatorname{Ass} M' \subset \operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} M' \cup \operatorname{Ass} M''$.

Démonstration. (i) On utilise (ii) deux fois, sur :

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$
$$0 \to M'' \to M \to M' \to 0.$$

(ii) Par définition, $\operatorname{Ass} M' \subset \operatorname{Ass} M$. Pour montrer l'autre inclusion, prenons $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} m \in \operatorname{Ass} M \setminus \operatorname{Ass} M'$. On écrit $\pi'' \colon M \to M''$ la projection canonique, alors $\mathfrak{p} \subset \operatorname{Ann} \pi''(m)$. Si $m' = am \in Am \cap M'$, alors il existe $a' \notin \mathfrak{p}$ tel que $0 = a'm' = a'am$, donc $a \in \mathfrak{p}$, i.e. $m' = am = 0$, donc $Am \cap M' = 0$. Du coup, on a

$$A/\mathfrak{p} \cong Am \cong \pi''(Am) \cong A\pi''(m),$$

et alors $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} \pi''(m) \in \operatorname{Ass} M''$. ☐

Proposition 2.28. *Soit A est noethérien. Si M est de type fini, alors il existe une filtration de module*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

telle que pour tout i, il existe $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A$ tel que $M_{i+1}/M_i \cong R/\mathfrak{p}_i$.

Démonstration. On raisonne par itération : Si $M \neq 0$, alors il existe $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass} M$ d'après corollaire 2.23, et alors, par proposition 2.20, on peut prendre $M_1 = A/\mathfrak{p}_1$. Si $M/M_1 \neq 0$, on applique encore le même argument. Puisque M est de type fini, ce processus se termine. ☐

En utilisant cette proposition, on peut démontrer théorème 2.21 (a) :

Démonstration de théorème 2.21 (a). On raison par itération : on a

$$0 \to M_{n-1} \to M_n \to M_n/M_{n-1} \cong A/\mathfrak{p}_{n-1} \to 0,$$

donc, d'après lemme 2.27, on a $\operatorname{Ass} M_n \subset \operatorname{Ass} M_{n-1} \cup \operatorname{Ass}(A/\mathfrak{p}_{n-1})$.

On répete ce processus pour $M_{n-1}, M_{n-2}, \ldots$, et on obtient $\operatorname{Ass} M_n \subset \bigcup_i \operatorname{Ass} A/\mathfrak{p}_i$, mais $\operatorname{Ass}(A/\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$, donc on a $\operatorname{Ass} M_n \subset \{ \mathfrak{p}_i \mid i = 1, \ldots, n-1 \}$. En particulier, on a $|\operatorname{Ass} M| < \infty$.

D'après corollaire 2.23, on a $|\operatorname{Ass} M| > 0$. ☐

2.3 Clôture intégrale

Dans cette section, A sera un anneau commutatif quelconque, et R sera un A-algèbre commutative quelconque.

Définition 2.29. Soit $x \in R$. Si $A[x]$ est un A-module de type fini, alors x est dit **intègre** sur A. Si tous les éléments de R sont intègre sur A, alors R est dit **intègre** sur A.

Proposition 2.30. *Soit $x \in R$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $A[x]$ est un A-module de type fini, i.e. x est intégral sur A ;

(ii) $A[x]$ est contenu dans un sous-A-algèbre de R de type fini ;

(iii) il existe un $A[x]$-module fidèle (définition 2.17) qui est de type fini comme un A-module ;

(iv) il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(x) = 0$. On rappelle ici qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient du terme de degré maximal vaut 1.

Démonstration. (iv) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) : trivial.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) : Soit M un $A[x]$-module fidèle de type fini sur A. On suppose que

$$M = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} Am_i, \qquad m_i \in M.$$

alors il existe une matrice $C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(A)$ telle que $xm_i = \sum c_{ij}m_j$ pour tout i. On prend

$$P = \det(XI - C) \in A[X],$$

alors $P(x)(m_1, \dots, m_n)^T I = \mathrm{adj}(xI - C) \cdot (xI - C)(m_1, \dots, m_n)^T = 0$, donc $P(x) \in \mathrm{Ann}\, M = 0$. □

En utilisant le fait que sous-modules d'un module de type fini sur un anneau Noethérien sont également de type fini (théorème 1.8 et définition 1.2), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.31. *Soit A est Noethérien, alors $x \in R$ est intégral sur A s.s.i. $A[x]$ est contenu dans un A-module de type fini.*

Définition 2.32. On définit la **clôture intégrale** de A dans R comme

$$\mathrm{ci}_R\, A \coloneqq \{\, x \in R \mid x \text{ est intègre sur } A \,\}.$$

Si $A = \mathrm{ci}_R\, A$, on dit que A est **intégralement clos** dans R.

Définition 2.33. Soit A un domaine intégre. On écrit $\mathrm{ci}\, A = \mathrm{ci}_{\mathrm{Frac}\, A}\, A$, appelé la **clôture intégrale** de A. Si $A = \mathrm{ci}\, A$, on dit que A est **intégralement clos**.

Proposition 2.34. *Si A est noethérian et intégralement clos, et $a \in A$ un non-diviseur-de-zéro, alors*

$$\mathrm{Ass}(A/aA) = \{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/aA) \subset \mathrm{Spec}\, A \mid \mathfrak{p} \textit{ est minimal dans } \mathrm{Spec}(A/aA) \,\}.$$

De plus, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/aA)$, l'unique idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$ est principal.

Démonstration. Montrons l'inclusion ($\supseteq$) : On écrit $M = A/aA$, alors évidemment $\mathrm{Ann}\, M = aA$, donc tous les minimals dans $\mathrm{Spec}(A/aA)$ sont associés à M par théorème 2.21(b).

Montrons maintenant l'inclusion inverse : Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M$, alors il existe $x \in A \backslash \mathrm{ann}\, A$ tel que $\mathfrak{p} = (aA : x)$ par proposition 2.26. D'après théorème 2.21 (d), en localisant A en $\mathfrak{p}$, on peut supposer sans perte de généralité que A est local avec l'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

On remarque que $\frac{x}{a}\mathfrak{p} \subseteq A$ est un idéal (où $\frac{x}{a} \in \mathrm{Frac}\, A$ car a est un non-diviseur de 0).

Si $\frac{x}{a}\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{p}$ est un $A[\frac{x}{a}]$-module, et alors $\frac{x}{a} \in \mathrm{ci}\, A = A$ par proposition 2.30 (iii), donc $x \in aA$, et $\mathfrak{p} = (aA : x) = A$, une contradiction.

Donc on a $\frac{x}{a}\mathfrak{p} = A$ parce que $\mathfrak{p}$ est maximal, alors il existe $a' \in \mathfrak{p}$ tel que $\frac{x}{a}a' = 1$, et alors $\mathfrak{p} = (aA : x) = (xa'A : x) = a'A$. Ce qui implique la dernière assertion de l'énoncé.

Montrons maintenant que $\mathfrak{p}$ est minimal. Soient I un premier minimal sur a contenu dans $\mathfrak{p}$. Si $a' \in I$, alors $I = a'A = \mathfrak{p}$. Si $a' \notin I$, alors pour tout $y \in I$ non nul, $y \in \mathfrak{p}$ implique qu'il existe un $y' \in A$ tel que $a'y' = y$. On a alors $y' \in I$ car I est premiers, donc $I = a'I$. Par réccuence, on peut montrer que $I = (a')^n I \subseteq \mathfrak{p}^n$ pour tout $n \geqslant 1$. On a alors $I = 0$ par le théorème d'intersection de Krull (théorème A.11), d'où une contradiction. □

Proposition 2.35. *Soit S une R-algèbre intègre sur R. Si R est intégral sur A, alors S est intégral sur A.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $x \in S$ est intégral sur A pour tout x. Car S est intégral sur R, il existe un polynôme $P = X^n + r_{n-1}X^{n-1} + \cdots + r_0 \in R[X]$ tel que $P(x) = 0$, donc x est intégral sur $R' = A[r_0, \ldots, r_{n-1}]$, alors $R'[x]$ est un R'-module de type fini. Puisque R' est un A-module de type fini, on en déduit que $R'[x]$ est un A-module de type fini. On alors obtient le résultat en utilisant proposition 2.30. □

Corollaire 2.36. $\mathrm{ci}_R(\mathrm{ci}_R A) = \mathrm{ci}_R A$, *donc* $\mathrm{ci}_R A$ *est intégralement clos dans R.*

Définition 2.37. On définit la **clôture intégrale complète** de A dans R comme

$$\mathrm{cit}_R A \coloneqq \{\, x \in R \mid A[x] \text{ est contenu dans un sous-}A\text{-module de } R \text{ de type fini} \,\}.$$

Si $A = \mathrm{cit}_R A$, on dit que A est **complètement intégralement clos** dans R.

Définition 2.38. Soit A un domaine intégre. On écrit $A^* = \mathrm{ci}_{\mathrm{Frac}\, A} A$, appelé la **clôture intégrale complète** de A. Si $A = A^*$, on dit que A est **complètement intégralement clos**.

D'après corollaire 2.31, on a un corollaire immédiat :

Corollaire 2.39. *Si A est un anneau intègre Noethérien, alors $A^* = \mathrm{cit}\, A$.*

On peut donc affirmer que $\mathrm{ci}_R(A)$ est un anneau :

Proposition 2.40. *Soit A un anneau intègre Noethérien, alors $\mathrm{ci}_R(A)$ est un anneau.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathrm{cit}_R(A)$ est un anneau. Soit $x, y \in \mathrm{cit}_R(A)$, supposons que $A[x] \subseteq A[a_1, \cdots, a_r]$ et $A[y] \subseteq A[b_1, \cdots, b_s]$. Alors on a

$$A[x-y] \cup A[xy] \subseteq A[x,y] \subseteq A[a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_s],$$

donc $x - y \in \mathrm{cit}_R(A)$ et $xy \in \mathrm{cit}_R(A)$. □

3
FILTRATION ET FILTRATIONS NOETHERIENNES

Dans toute la suite de cette section, A sera un anneau commutatif quelconque.

Après s'être penché sur la notion de noethériennité, il est maintenant temps de s'attarder sur les filtrations. La suite de cette section est basée sur le livre [Ree88] de D. Rees.

3.1 Généralité sur les filtrations

Définition 3.1. (filtration) Soit A un anneau. Une **filtration** sur A est une application $f : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, satisfaisant les propriétés suivantes :

(1) $f(0) = +\infty$;

(2) $f(x-y) \geqslant \min(f(x), f(y))$ pour tous $x, y \in A$;

(3) $f(xy) \geqslant f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in A$.

Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note $\operatorname{Fil}_S A$ pour l'ensemble des filtrations à valeurs dans $S \cup \{+\infty\}$ sur A. En particulier, on écrit $\operatorname{Fil} A \coloneqq \operatorname{Fil}_{\mathbb{R}} A$ et $\operatorname{Fil}^+ A \coloneqq \operatorname{Fil}_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}} A$.

Remarque 3.2. $\operatorname{Fil} A$ est stable par addition et par prendre le minimum de deux éléments.

Remarque 3.3. La propriété (3) nous donne $f(1) \geqslant f(1) + f(1)$. On a alors deux choix :

— $f(1) = \infty$: Dans ce cas, par l'équation 3 de nouveau on trouve $f(x) \geqslant f(x) + f(1)$ et donc $\forall x \in A, f(x) = \infty$.

— Sinon, $f(1) \leqslant 0$, et donc la propriété (1) nous donne $f(1) = 0$. Le second cas dégénéré est alors $f(0) = \infty$, et $\forall x \in A, x \neq 0, f(x) = 0$

De plus, bien que les filtrations soient à valeurs dans $\mathbb{R}$, on se réduira autant que possible au cas des filtrations dans $\mathbb{N}$. En effet, sans perte de généralité on pourrait définir la diltration $\lfloor f \rfloor(x) = \lfloor f(x) \rfloor$, qui est équivalente à f dans le sens où :

Définition 3.4. Deux filtrations $f, g \in \operatorname{Fil} A$ sont dites équivalentes s'il existe une constante C telle que

$$|f(x) - g(x)| \leqslant C, \qquad \forall x \in A,$$

noté par $f \sim g$.

Définition 3.5 (Filtration homgène et valuation)**.** Une filtration $h \in \operatorname{Fil} A$ est dite **homogène** si

$$h(x^n) = nh(x), \qquad \forall x \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Une filtration $v \in \operatorname{Fil} A$ est appelée valuation si :

$$v(xy) = v(x) + v(y), \qquad \forall x, y \in A.$$

On écrit $\operatorname{Val} A$ pour l'ensemble des valuations sur A.

Proposition 3.6. *Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille de valuation, alors $h(x) = \inf_{i\in I} v_i(x)$ est une filtration homogène.*

Démonstration. Montrons d'abord que h est une filtration. Pour tout $i \in I$, on a $v_i(x+y) \geqslant \min(v_i(x), v_i(y))$. En prenant l'infimum, on obtient :

$$h(x+y) = \inf_{i\in I} v_i(x+y) \geqslant \inf_{i\in I} \min(v_i(x), v_i(y)) \geqslant \min\left(\inf_{i\in I} v_i(x), \inf_{i\in I} v_i(y)\right) = \min(h(x), h(y)).$$

et, pour tout $i \in I$, on a $v_i(xy) \geqslant v_i(x) + v_i(y)$. Donc :

$$h(xy) = \inf_{i\in I} v_i(xy) \geqslant \inf_{i\in I}(v_i(x) + v_i(y)) \geqslant \inf_{i\in I} v_i(x) + \inf_{i\in I} v_i(y) = h(x) + h(y).$$

L'application $h(x) := \inf_{i\in I} v_i(x)$ est donc bien une filtration sur A. Montrons qu'elle est homogène. En effet, on a pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h(x^n) = \min_{i\in I} v(x^n) = \min_{i\in I} nv(x) = n \min_{i\in I} v(x) = h(x),$$

ce qui permet de conclure. □

Le lemme suivant assure qu'à partir une filtration, on peut produire une valuation homogène, dont on étudiera ses propriétés dans la suite.

Lemme 3.7. *Si $f \in \mathrm{Fil}\, A$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(\frac{x^n}{n})$ converge dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour tout x dans A.*
De plus, si on note $f^{\mathrm{hom}}(x)$ cette limite, alors f^{hom} est une filtration homogène, et, si h est une filtration homogène satisfaisant $h \geqslant f$, on a alors aussi $h \geqslant f^{\mathrm{hom}}$. On appelle f^{hom} ***la fonction de Samuel*** *de f.*

Démonstration. Si $f(x^m) = \infty$ pour un certain entier positif m, alors $f(x) = \infty$ pour tout $n > m$. Ainsi, dans ce cas, la limite est égale à ∞. Supposons maintenant que $f(x) < \infty$ pour tout n, par la propriété 3 de définition 3.1. Notons $a(n) = \frac{f(x^n)}{n}$. Alors, $(m+n)a(m+n) = f(x^{m+n}) \geqslant f(x^m) + f(x) = ma(m) + na(n)$, d'après le lemme additif de Fekete suivant (lemme 3.8), $a(n)$ admet une limite a lorsque n tend vers l'infini.

Lemme 3.8 (Lemme sous-additif de Fekete)**.** *Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle tel que $a_{m+n} \geqslant a_m + a_n$ pour tout $m, n \geqslant 1$, alors la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*

Remarque 3.9. On peut trouver aisément les démonstrations de ce lemme sur l'internet (Fekete lui-même a démontré une version multiplicative dans §2.II de [Fek23]).

Ensuite, définissons $a(n) = \frac{f(x^n)}{n}$, $b(n) = \frac{f(y^n)}{n}$, et $c(n) = \frac{f((x-y)^n)}{n}$. Alors,

$$f^{\mathrm{hom}}(x-y) \geqslant c(n) \geqslant \min_{0\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{f(x^i) + f(y^{n-i})}{n}\right) = \frac{sa(s) + (n-s)b(n-s)}{n}$$

pour un certain s entre 0 et n.

Posons maintenant $a = \min(f^{\mathrm{hom}}(x), f^{\mathrm{hom}}(y))$ et soit $b < a$. Il existe un entier m tel que, pour $n > m$, on ait $a(n), b(n) > b$. Soit q un entier tel que $q > 1$ et posons $n = qm$.

$$c(qm) \geqslant \frac{sa(s) + (qm-s)b(qm-s)}{qm}$$

pour un certain $s < qm$.

Si à la fois s et $(qm - s)$ sont $\geqslant 2m$, cela implique que $c(mq) > b$. Sinon, on a $c(mq) > \frac{(q-1)b}{q}$. Ainsi,

$$f^{\mathrm{hom}}(x-y) > \frac{(q-1)b}{q}, \forall q,$$

ce qui implique que $f^{\mathrm{hom}}(x-y) \geqslant b$, et donc $f^{\mathrm{hom}}(x-y) \geqslant \min(f^{\mathrm{hom}}(x), f^{\mathrm{hom}}(y))$.

Ensuite, la relation $f(x^n y^n) \geqslant f(x^n) + f(y^n)$ implique que $f^{\mathrm{hom}}(xy) \geqslant f^{\mathrm{hom}}(x) + f^{\mathrm{hom}}(y)$. La véracité de la condition (1) dans définition 3.1 pour f^{hom} est immédiate. Ainsi, $f^{\mathrm{hom}} \in \mathrm{Fil}\, A$.

Le fait que cette filtration soit homogène découle du fait que, si $y = x^m$, et si $a(n)$, $b(n)$ sont définis comme ci-dessus, alors $b(n) = ma(nm)$, et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient $f^{\mathrm{hom}}(x^m) = mf^{\mathrm{hom}}(x)$.

Enfin, si $h(x)$ est une filtration homogène telle que $h(x) \geqslant f(x)$ pour tout x, alors

$$\frac{h(x)}{n} \geqslant \frac{f(x)}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons le résultat attendu : $h(x) \geqslant f^{\mathrm{hom}}(x)$. □

On a immédiatement deux corollaires suivant :

Corollaire 3.10. $f^{\mathrm{hom}} \geqslant f$.

Corollaire 3.11. *Si $f \sim g$, alors $f^{\mathrm{hom}} = g^{\mathrm{hom}}$. En particulier, $f^{\mathrm{hom}} = \lfloor f \rfloor^{\mathrm{hom}}$.*

Le lemme suivant est essentiel pour l'unicité dans le théorème de Rees (notre but !) :

Lemme 3.12. *Si $h(x) = \min(v_1(x), \cdots, v_s(x))$, où $v_1(x), \cdots, v_s(x)$ sont des valuations sur A. De plus, on suppose que cette représentation n'est pas redondante (i.e. $\forall i, j \in [\![1; s]\!]$, $\exists x \in A$ tel que $v_i(x) \neq v_j(x)$). Alors $v_1, \cdots, v_s$ sont entièrement est uniquement déterminés par h.*

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, nous diviserons A en sous-ensemble h-compatible (que l'on définit comme un ensemble fermé multiplicativement S tel que $h(xy) = h(x) + h(y)$ pour tout $x, y \in S$), et cette division, découlant de h, définira des ensembles S_i qui permettront de définir de manière unique chacun des v_i.

Supposons que F soit le sous-ensemble de A constitué de tous les éléments x tels que $h(x) < \infty$. Alors, $v_i(x) = \infty$ pour tout i et pour tout x n'appartenant pas à F.

Supposons maintenant que $v(x)$ soit une valuation sur A telle que $v(x) \geqslant h(x)$ pour tout $x \in A$. Soit $S(v)$ le sous-ensemble de F constitué de tous les éléments x tels que $v(x) = h(x)$. Alors, si $x_1, \ldots, x_r \in S(v)$, nous avons $v(x_1 x_2 \ldots x_p) = v(x_q) + \cdots + v(x_p) = h(x_q) + \cdots + h(x_p) \leqslant h(x_1 x_2 \ldots x_p)$, d'où il s'ensuit que $h(x_1 \ldots x_p) = h(x_1) + \cdots + h(x_p)$. Ainsi, $S(v)$ est h-compatible pour toute valuation v sur A telle que $v(x) \geqslant h(x)$ pour tout $x \in A$.

Nous observons maintenant que, comme h est homogène, tout sous-ensemble de F contenant un seul élément est h-compatible. Ainsi, des sous-ensembles h-compatibles existent, et de plus, nous pouvons appliquer le lemme de Zorn pour voir que F est l'union de ses sous-ensembles maximaux h-compatibles. Nous allons maintenant montrer que ces sous-ensembles maximaux h-compatibles de F sont les ensembles $S_i ;= S(v_i)$ pour v_i.

Supposons que S soit un sous-ensemble h-compatible de F qui n'est contenu dans aucun des sous-ensembles $S_1, \ldots, S_s$. Alors, pour chaque i, il existe un élément x_i de S qui n'est pas dans S_i, c'est-à-dire $v_i(x_i) > h(x_i)$. Ainsi, pour chaque i, nous avons $h(x_1) + \cdots + h(x_p) < v_i(x_1) + \cdots + v_i(x_p) = v_i(x_1 \ldots x_p)$ et donc

$$h(x_1) + \cdots + h(x_g) < \min(v_1(x_1 \ldots x_g), \ldots, v_s(x_1 \ldots x_g)) = h(x_1 \ldots x_g),$$

ce qui contredit le fait que S soit h-compatible. Ainsi, $S_1, \ldots, S_s$ sont des sous-ensembles h-compatibles de F et un sous-ensemble h-compatible maximal est nécessairement l'un des ensembles S_i.

Ensuite, $S_1, \ldots, S_s$ sont distincts : en effet, la condition d'irréductibilité stipule que pour chaque i, il existe un élément $x_i \in A$ tel que $h(x_i) = v_i(x_i)$ et $h(x_i) < v_j(x_i)$ pour tout $j \neq i$. Cela implique que $h(x_i) < \infty$, et donc que x_i est contenu dans F. De plus, S_i n'est pas contenu dans l'union des ensembles S_j pour $j \neq i$. Par conséquent, les ensembles S_i sont les sous-ensembles h-compatibles maximaux de F.

Définissons maintenant Σ_i comme l'ensemble des éléments $a \in F$ tels que $aS_i \cap S_i \neq \varnothing$. Alors, Σ_i est constitué de tous les a tels que $v_i(a) < \infty$. Supposons en effet que a soit un tel élément. Alors, si x_i est comme ci-dessus et si $i \neq j$, on a $v_j(ax_i^m) - v_i(ax_i^m) = v_j(a) - v_i(a) + m(v_j(x_i) - v_i(x_1)) > 0$ si m est suffisamment grand. Ainsi, $ax_i^m \in aS_i \cap S_i$, ce qui implique que a appartient à Σ_i.

Réciproquement, si $ay = z$, avec $y, z \in S_i$, alors $v_i(a) = v_i(z) - v_i(y) = h(z) - h(y) < \infty$. Cela montre que v_i est déterminée sur Σ_i par h et est infini en dehors de Σ_i. Ainsi, les valuations $v_1, \ldots, v_k$ sont uniquement déterminées par h. □

3.2 Anneau gradué associé à une filtration

Soit A un anneau commutatif et $f \in \operatorname{Fil} A$.

On écrit $A_0(f) = A(f) := \{ x \in A \mid f(x) \geqslant 0 \}$. C'est évidemment un sous-anneau de A. On définit

$$f^+ := f|_{A_0}, \quad f^-(x) := \min(f(x), 0),$$

alors $f^+ \in \operatorname{Fil}^+ A_0$ et $f^- \in \operatorname{Fil} A$.

Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on définit

$$I_n = I_n(f) := \{ x \in A \mid f(x) \geqslant n \},$$

alors I_n est un idéal de A_0 pour tout $n \geqslant 0$, et c'est un A_0-module pour tout $n < 0$. On remarque que $I_m I_n \subset I_{m+n}$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on obtient alors le résultat suivant :

Lemme 3.13. *$\sqrt{I_m} = \sqrt{I_n}$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\sqrt{I_m} = \sqrt{I_{m+1}}$ pour tout $m \geqslant 1$. D'un côté, on a $I_{m+1} \subset I_m$, donc $\sqrt{I_{m+1}} \subseteq \sqrt{I_m}$. De l'autre côté, on a $I_m^2 \subset I_{2m} \subset I_{m+1}$, donc $\sqrt{I_{m+1}} \supseteq \sqrt{I_m}$, d'où l'égalité. □

On peut alors définir le radical d'une filtration.

Définition 3.14. On définit le **radical** de f : $\operatorname{rad}(f) := \sqrt{I_n}$, où n est un entier strictement positive quelconque.

Exemple 3.15. Soit I un idéal de A_0 tel que $I^{(-\infty)} = A$. On définit

$$\begin{aligned} f_I \colon A &\to \mathbb{Z}, \\ x &\mapsto \max\left\{ n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, x \in I^{(n)} \right\}, \end{aligned}$$

ou explicitement

$$f_I(x) = \begin{cases} \max\{ n \in \mathbb{N} \mid x \in I^n \}, & \text{si } x \in A_0, \\ -\min\{ n \in \mathbb{N} \mid xI^n \subset A_0 \}, & \text{si } x \notin A_0, \end{cases}$$

alors f_I est une filtration sur A, et on a $I_n(f_I) = I^{(n)}$.

En particulier, si $I = (a)$ est un idéal principal, où a est régulier (i.e. a est un non-diviseur de zéro), et $A = (A_0)_a$, alors on écrit $f_a = f_I$, cette fonction est alors appelée la **filtration principale** associée à a.

Définition 3.16. Soit f une filtration sur A. On définit $G(f) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_n t^n$, ou explicitement

$$G(f) = \left\{ \sum_{n=p}^{q} x_n t^n \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, \text{ et } x_n \in I_n \text{ pour } n = p, \ldots, q \right\},$$

qui est un sous-anneau gradué de $A[t, t^{-1}]$. On souvent écrit $u = t^{-1}$. Évidemment, $A_0[u]$ est un sous-anneau gradué de $G(f)$.

Remarquons que $G(f) = G(\lfloor f \rfloor)$, ce fait ainsi que le corollaire 3.11 nous suggère d'étudier les filtrations à valeurs entières, la correspondance suivante est un résutat utile pour la suite.

Théorème 3.17. *Il existe des bijections entre les trois ensembles subordonnés :*

$$\operatorname{Fil}_{\mathbb{Z}} A = \{ \textit{filtrations à valeurs entières sur } A \}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{chaînes décroissantes de } I_0\textit{-module} \\ \qquad A \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots \\ \textit{avec } I_0 \textit{ un sous-anneau de } A \\ \textit{t.q. } I_m I_n \subset I_{m+n} \textit{ ; et } I_{-\infty} = \cup_{\mathbb{Z}} I_n = A \end{array} \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-anneau gradué } G \textit{ de } A[t, u] \textit{ « suffisamment grand »,} \\ \textit{i.e. } u \in G \textit{ ; et pour tout } x \in A, \textit{ il existe } n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } xu^n \in G \end{array} \right\}$$

donné par $f \mapsto \{I_n(f)\} \mapsto G(f)$.

De manière intuitive, pour $f \in \operatorname{Fil}_{\mathbb{Z}} A$*, on a la correspondance suivante entre les conditions :*

$$\begin{array}{rcccl} f \text{ est définie sur } A & \leftrightarrows & I_{-\infty} = A & \leftrightarrows & G(f) \text{ est « suffisamment grand »}, \\ f(x-y) \geqslant \min(f(x), f(y)) & \leftrightarrows & I_n \supset I_{n+1} & \leftrightarrows & u \in G(f), \\ f(xy) \geqslant f(x) + f(y) & \leftrightarrows & I_m I_n \subset I_{m+n} & \leftrightarrows & G(f) \text{ est gradué.} \end{array}$$

Démonstration. On note $\mathfrak{C}$ l'ensemble des chaînes décroissantes et $\mathfrak{G}$ l'ensemble des sous-anneaux gradués, comme énoncé dans cet théorème.

Tout d'abord, on montre que

$$\begin{aligned} I_\bullet \colon \operatorname{Fil}_{\mathbb{Z}} A &\to \mathfrak{C}, \\ f &\mapsto \{\, I_n(f) \mid n \in \mathbb{Z} \,\} \end{aligned}$$

est bijective. Elle est évidemment injective. Soit $\{I_n\} \in \mathfrak{C}$. On définit $f \colon A \to \mathbb{Z}$ par

$$f(x) = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\} \mid x \in I_n \,\}, \qquad \forall x \in A,$$

où on pose $I_\infty \coloneqq \cap_{\mathbb{Z}} I_n$ et $I_{-\infty} \coloneqq \cup_{\mathbb{Z}} I_n = A$. On a évidemment que $0 \in I_\infty$, donc $f(0) = +\infty$. Soit $a, b \in A$ quelconques vérifient $f(a) = m$ et $f(b) = n$. On suppose sans perte de généralité que $m \leqslant n$, alors $I_m \subset I_n$, donc $a - b \in I_n$, et alors $f(a-b) \geqslant n = \min(f(a), f(b))$. On a $ab \in I_m I_n \subset I_{m+n}$, donc $f(ab) \geqslant m + n = f(a) + f(b)$. On alors conclut que $f \in \operatorname{Fil} A$, et clairement $I_n(f) = I_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $I_\bullet$ est surjective.

Ensuite, on montre que

$$\begin{aligned} G \colon \mathfrak{C} &\to \mathfrak{G}, \\ \{I_n\} &\mapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_n t^n \end{aligned}$$

est bijective. Puisque $I_m I_n \subset I_{m+n}$, on sait que G est une application bien définie, c'est-à-dire $G(\{I_n\}) \in \mathfrak{G}$. C'est évident que G est injective. Soit $\widehat{G} \in \mathfrak{G}$, alors on peut écrire $\widehat{G} = \oplus_{\mathbb{Z}} I_n t^n$. C'est clair que $I_0 = \widehat{G}_0$ est un sous-anneau de A. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$I_0 I_{n+1} = \widehat{G}_0 \widehat{G}_{n+1} u^{n+1} \subset \widehat{G}_{n+1} u^{n+1} = I_{n+1},$$

et

$$I_{n+1} = \widehat{G}_{n+1} u^{n+1} \subset \widehat{G}_{n+1} \widehat{G}_{-1} u^n \subset \widehat{G}_n u^n = I_n,$$

donc $\{I_n\}$ est une chaîne décroissante de I_0-modules. On a évidemment $I_m I_n \subset I_{m+n}$. Pour tout $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $xu^n \in \widehat{G}$, donc $x \in I_n$. En conclusion, on a $\{I_n\} \in \mathfrak{C}$, donc G est surjective. □

3.3 Clôture intégrale d'une filtration

Soit A un anneau commutatif et $f \in \operatorname{Fil} A$. On écrit $G^*(f) = \operatorname{ci}_{A[t,u]} G(f)$ pour la clôture intégrale de $G(f)$ dans $A[t, u]$ (c.f. section 2.3 pour la notation).

On définit une filtration à valeur entière que l'on montrera équivalente à la fonction de Samuel.

Définition 3.18 (Clôture intégrale d'une filtration)**.** On définit la clôture intégrale de f, notée f^*, comme la filtration associé a $G^*(f)$ (c.f. théorème 3.17), i.e.

$$f^*(x) = \max\{\, m \mid xt^m \in G^*(f) \,\},$$

ou explicitement :

$$f^*(x) \geqslant m \iff \exists a_1, \cdots, a_n \in A, \text{ tel que } f(a_i) \geqslant im \text{ et } a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n = 0.$$

Démonstration de l'équivalence. Supposons que $k = f^*(x) \geqslant m$, alors on a $xt^k \in G^*(f)$, donc il existe $c_1, \cdots, c_n \in G(f)$ tels que $c_n + c_{n-1}xt^k + \cdots + c_1(xt^k)^{n-1} + (xt^k)^n = 0$. Prenons $a_i t^{ki}$ la composante homogène de c_i de degré ki, alors on a $f(a_i) \geqslant ik \geqslant im$ et $a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n = 0$.

Réciproquement, si on a $a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n = 0$ avec $f(a_i) \geqslant im$, alors

$$a_n t^{mn} + a_{n-1}t^{m(n-1)}xt^m + \cdots + a_1 t^m (xt^m)^{n-1} + (xt^k)^n = 0,$$

d'où le résultat. □

Remarque 3.19. $G^*(f)$ est en effet gradué et on a $G(f^*) = G^*(f)$. On va donner une démonstration pour ce fait quand $G(f)$ est Noethérien (corollaire 3.25), ce qui suffit pour notre discussion, mais on remarque que $G(f^*) = G^*(f)$ est valide dans un cadre général, les intéressés peuvent consulter Proposition 20 du paragraphe 1.8 du chapître V de [Bou07].

Remarque 3.20. $f^* = \lfloor f \rfloor^*$.

Lemme 3.21. *$\lfloor f(x) \rfloor \leqslant f^*(x) \leqslant f^{\text{hom}}(x) \leqslant f^*(x) + 1$. Donc $f^* \sim f^{\text{hom}}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $f(x) \leqslant f^*(x)$. Posons $\lfloor f(x) \rfloor = m$, et prenons $a_1 = -x$, alors $a_1 + x = 0$. Par définition 3.18, on obtient que $f^*(x) \geqslant m$, donc $f(x) \leqslant f^*(x)$ car $f^*(x)$ est un entier.

Montrons maintenant que $f^*(x) \leqslant f^{\text{hom}}(x)$. Si $f^*(x) \geqslant m$, alors pour tout $n \geqslant 1$, il existe des éléments a_i tels que $f(a_i) \geqslant im$ et $x^n = -a_n - a_{n-1}x - \cdots - a_1 x^{n-1}$. On peut montrer par récurrence sur $k \geqslant 0$ qu'il existe des $a_{k,n}$ tel que $f(a_{k,i}) \geqslant (i+k)m$ et $x^{n+k} + a_{1,k}x^{n-1} + \cdots + a_{n,k} = 0$. Le cas $k = 0$ est déjà établi. Supposons que le cas de k est établi, alors $a_{i,k+1} = a_{1,k}a_i - a_{i+1,k}$ véifient les conditions requises pour le cas de $k+1$.

En appliquant f, on obtient :

$$f(x^{n+k}) \geqslant \min\{f(a_{n,k}),\ f(a_{n-1,k}x),\ \ldots,\ f(a_{1,k}x^{n-1})\} \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{(i+k)m + (n-i)f(x)\}.$$

En divisant par $n+k$ et en faisant $k \to +\infty$, on déduit que $f^{\text{hom}}(x) \geqslant m$, donc $f^*(x) \leqslant f^{\text{hom}}(x)$.

Montrons finalement que $f^{\text{hom}}(x) \leqslant f^*(x) + 1$.

Si $f^*(x^n) \geqslant n(m+1)$, alors x vérifie une équation $x^{nr} + b_1 x^{n(r-1)} + \cdots + b_r = 0$ avec $f(b_1) \geqslant in(m+1)$. on a donc $f^*(x) \geqslant m+1$. Par conséquent, si $f^*(x) = m < \infty$, on a $\lfloor f \rfloor(x^n) \leqslant f^*(x^n) < n(m+1)$. Ceci implique que $\frac{\lfloor f \rfloor(x^n)}{n} < m+1$ pour tout n, donc $f^{\text{hom}}(x) \leqslant m+1$. Le cas $f^*(x) = \infty$ est immédiat. □

Corollaire 3.22 (c.f. corollaire 3.11)**.** *Si $f \sim g$, alors $f^* \sim g^*$.*

3.4 Filtration noethérienne

On peut maintenant parler de la noethérienité d'une filtration.

Définition 3.23. On dit que f est une filtration noethérienne si $G(f)$ est noethérien gradué.

Dans cette section, on ne considére que les filtrations noethériennes. Dans ce cas, d'après le théorème de Samuel (théorème 1.16), on sait que $G_0(f) = A_0$ est noethérien et $G^+(f)$, $G^-(f)$ sont noethériens gradués, donc f^+ et f^- sont aussi noethériennes.

Lemme 3.24. *Soit $f \in \operatorname{Fil} A$ noethérienne et $x \in A$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on a :*

— *$xt^m \in G^*(f)$ s.s.i. il existe $k(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $(xt^m)^n \in u^{-k(x)}G(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

ou de manière équivalente,

— *$f^*(x) \geqslant m$ s.s.i. il existe $k(x) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x^n) \geqslant mn - k(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. On a par définition $f^*(x) \geqslant m$ s.s.i. $\exists a_1, \cdots, a_n$ tel que $f(a_i) \geqslant im$ et $a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n = 0$, s.s.i. l'élément xt^m est dépendent intègrement sur $G(f)$ (i.e., $xt^m \in G^*(f)$). Puisque $G(f)$ est Noethérien, c'est équivalent à dire qu'il existe un entier k tel que $(xt^m)^n \in u^{-k}G(f)$ pour tout n, d'où le résultat. □

Corollaire 3.25. *Soit $f \in \operatorname{Fil} A$ noethérienne, on a $G^*(f) = G(f^*)$.*

Démonstration. Supposons que $xt^m \in G(f^*)$ avec $f^*(x) \geqslant m$. Par définition on a on a $xt^m \in G^*(f)$. Donc $G(f^*) \subseteq G^*(f)$.

Réciproquement, supposons que $x \in G^*(f)$ et écrivons

$$x = \sum_i x_i t^i, x_i \in A.$$

D'après corollaire 2.31, $G(f)[x]$ est un $G(f)$-module de type fini, donc $x^n \in u^{-k}G(f)$ pour certain $k \in \mathbb{Z}$.

On montre par récurrence sur le nombre des x_i qui sont non nuls que les $x_i t^i$ sont dans $G(f^*)$:

Le cas où ce nombre vaut 1 est gratuit.

Pour le cas où ce nombre est au moins 2, on peut montrer que le terme de degré maximun est dans $G^*(f)$, ce qui nous permet de ramener le problème au cas où le nombre de termes non nuls est plus petit. En effet, notons s le degré maximal, on a pour tout n,

$$x^n = x_s^n t^{sn} + \text{termes de degré plus petit} \in u^{-k}G(f)$$

donc $f(x_s^n) \geqslant ns - k$, donc par lemme 3.24 $f^*(x_s) \geqslant s$, d'où le résultat. □

Définition 3.26. Soit f une filtration sur A et $\mathfrak{a}$ un idéal de A. On définit $f/\mathfrak{a}$ la filtration sur $A/\mathfrak{a}$ déterminée par la suite d'idéaux

$$I_n(f/\mathfrak{a}) = (I_n(f) + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}.$$

dans la correspondance de théorème 3.17, i.e. $f/\mathfrak{a}(\bar{x}) = \sup_{a\in\mathfrak{a}} f(x+a)$ pour tout $\bar{x} \in A/\mathfrak{a}$.

Vérification de l'équivalence. Montrons d'abord que $f/\mathfrak{a}(x) = \sup_{a\in\mathfrak{a}} f(x+a)$ définit une filtration :

Pour tout $x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned} f/\mathfrak{a}(\bar{x}\bar{y}) &= \sup_{a\in\mathfrak{a}} f(xy+a) \\ &\geqslant \sup_{a_1,a_2\in\mathfrak{a}} f((x+a_1)(y+a_2)) \\ &\geqslant \sup_{a_1,a_2\in\mathfrak{a}} (f(x+a_1) + f(y+a_2)) \\ &= \sup_{a_1\in\mathfrak{a}} f(x+a_1) + \sup_{a_2\in\mathfrak{a}} f(y+a_2) \\ &= f/\mathfrak{a}(\bar{x}) + f/\mathfrak{a}(\bar{y}) \end{aligned}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} f/\mathfrak{a}(\bar{x}-\bar{y}) &= \sup_{a\in\mathfrak{a}} f(x-y+a) \\ &\geqslant \sup_{a_1,a_2\in\mathfrak{a}} f((x+a_1)-(y+a_2)) \\ &\geqslant \sup_{a_1,a_2\in\mathfrak{a}} \min(f(x+a_1), f(y+a_2)) \\ &= \min(\sup_{a_1\in\mathfrak{a}} f(x+a_1), \sup_{a_2\in\mathfrak{a}} f(y+a_2)) \\ &= f/\mathfrak{a}(\bar{x}) + f/\mathfrak{a}(\bar{y}) \end{aligned}$$

De plus, cette filtration correspond aux idéaux $(I_n(f)+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ par la correspondance de théorème 3.17 :

$$\sup_{a\in\mathfrak{a}} f(x+a) \geqslant n \iff \exists a \in \mathfrak{a}, f(x+a) \geqslant n \iff \exists a \in \mathfrak{a}, x+a \in I_n(f) \iff \bar{x} \in (I_n(f)+\mathfrak{a})/\mathfrak{a},$$

ce qui conclut. □

On remarque que d'après le théorème des premiers minimaux de Noether (théorème 1.5), dans un anneau Noethérien on peut écrire le radical d'un idéal comme l'intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers :

Corollaire 3.27. *Soit A un anneau noethérien, et I un idéal de A, alors*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq I \text{ premier minimal}} \mathfrak{p}.$$

Démonstration. On a d'après théorème 1.11

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq I} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq I \text{ premier minimal}} \mathfrak{p}.$$

□

D'après ce résultat, on obtient que

Lemme 3.28. *Soit A un anneau noethérien, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers minimaux de A, f une filtration noethérienne sur A, alors*

$$f^*(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant s} (f/\mathfrak{p}_i)^*(x_i), \text{ où } x_i = x + \mathfrak{p}_i \in A/\mathfrak{p}_i.$$

Démonstration. Pour tout i, par définition de $f/\mathfrak{p}_i$, on a :

$$(f/\mathfrak{p}_i)(x_i) = \sup_{a \in p_i} f(x+a) \geqslant f(x).$$

donc $(f/\mathfrak{p}_i)(x_i) \geqslant f(x)$ et $(f/\mathfrak{p}_i)^*(x_i) \geqslant f^*(x)$, donc

$$\min_i (f/\mathfrak{p}_i)^*(x_i) \geqslant f^*(x).$$

De l'autre côté, si on a $(f/\mathfrak{p}_i)^*(x_i) \geqslant m$ pour tout i, puisque A est noethérien, on a d'après corollaire 3.27

$$\bigcap_{i=1}^{s} p_i = \sqrt{(0)}.$$

Donc, selon lemme 1.14, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left(\prod_{i=1}^{s} p_i \right)^N = 0.$$

Prenons a_i tel que $f(a_i) \geqslant m$ et que $x - a_i \in \mathfrak{p}_i$, alors on a $(x-a_1)^N (x-a_2)^N \cdots (x-a_s)^N = 0$, donc par définition 3.18, $f^*(x) \geqslant m$. □

Théorème 3.29. *Soit f une filtration noethérienne sur un anneau noethérien A.*

1. *Il existe $a \in A$ satisfaisant $f(a) > 0$ tel que pour tout $x \in A$, on a $f(x) = \infty$ s.s.i. $ax = x$;*
2. *Si $f(1) \neq \infty$, alors pour tout non-diviseur de zéro x de A, il existe $\mu(x) \in \mathbb{Z}$ dépendant sur x et f, tel que pour tout $y \in A$ satisfaisant $f(y) < \infty$, on a $f(xy) \leqslant f(y) + \mu(x)$.*

Démonstration. (1) Considérons d'abord un seul élément x et montrons que $f(x) = \infty$ si et seulement s'il existe un élément $a(x)$ avec $f(a(x)) > 0$ tel que $a(x)x = x$. La partie "si" est évidente.

Pour prouver la partie "seulement si". Par définition, les éléments $t^n x$ appartiennent à $G(f)$ pour tout n. Par conséquent, s'ils engendrent un idéal J, il existe un entier m tel que J est engendré par les éléments $t^r x$ pour $1 \leqslant r \leqslant m$. Il en suit que

$$t^{m+1} x = \sum_{r=1}^{m} a_r t^r x t^{m+1-r},$$

où $a_r t^{m+1-r} \in G(f)$, i.e. $f(a_r) \geqslant m+1-r \geqslant 1$. Prenons

$$a(x) = \sum_{r=1}^{m} a_r,$$

alors $x = a(x)x$ et $f(a(x)) \geqslant 1 > 0$.

Soit N l'idéal de A constitué de tous les éléments x tels que $f(x) = \infty$. Soit $x_1, \ldots, x_m$ une base de N et posons $a(i) = a(x_i)$ tel que défini ci-dessus. Alors, pour tout $x \in N$, $(1-a(1))\ldots(1-a(m))x = 0$. On peut écrire $(1-a(1))\cdots(1-a(m))$ sous la forme $1-a$ et clairement $f(a) > 0$. On a alors $x = ax$ pour tout x tel que $f(x) = \infty$ comme voulu.

(2) Supposons maintenant que $f(xy) \geqslant n$, cela équivaut à $xu^{-n}y \in G(f)$, et cela équivaut à $u^{-n}y \in (G(f) :_{A[t,u]} x)$. Puisque x n'est pas un diviseur de zéro, $(G(f) :_{A[t,u]} x)$ est isomorphe comme $G(f)$-module à l'idéal $x(G(f) :_{A[t,u]} x)$ de $G(f)$ et, comme $G(f)$ est noethérien, $(G(f) :_{A[t,u]} x)$ est un $G(f)$-module de type fini contenu dans $A[t,u] = G(f)_{(u)}$. (Voir remarque 3.30) Donc il existe un entier μ tel que $u^{-\mu(x)}G(f) \supseteq (G(f) :_{A[t,u]} x)$. Alors $u^{\mu(x)-n}y \in G(f)$ et donc $f(y) \geqslant n - \mu(x)$. Puisque $f(x) < \infty$ (remarque 3.31) et $f(y) < \infty$, cela implique que $f(xy) < \infty$. Prenons $n = f(xy)$ et on obtient $f(xy) - f(y) \leqslant \mu(x)$ pour tout y tel que $f(y) < \infty$. □

Remarque 3.30. On a $A[t,u] = G(f)_{(u)}$ parce que pour tout élément $xt^k \in A[t,u]$ avec $k \in \mathbb{Z}, x \in A$, notons $m = f(x)$, alors si $k \leqslant m$, on a $xt^k \in G(f) \subseteq G(f)_{(u)}$; et si $k > m$, on a $xt^k = xt^m t^{k-m} = u^{m-k}xt^m \in G(f)_{(u)}$.

Remarque 3.31. Soit f une filtration noethérienne sur un anneau noethérien A.

— Si x est un non-diviseur de zéro, alors d'après théorème 3.29 (1) on a $f(x) < \infty$;

— Si $f(xy) = \infty$ et x est un non-diviseur de zéro, alors $f(y) = \infty$;

— Si $f(1) = 0$ et x est un non-diviseur de zéro, alors $f^*(x) < \infty$. Plus précisément, si on écrit

$$J = f^{-1}(\infty) = \{\, y \in A \mid f(y) = \infty \,\},$$

alors $f^*(x) = \infty$ s.s.i. $x \in \sqrt{J}$.

Voyons maintenant une critère d'équivalence des filtrations en comparant leur clôture intégrale.

Lemme 3.32. *Soit f, g deux filtrations noetheériennes sur un anneau noethérien A, alors*

1. *Si f, g sont équivalentes, alors $f^* = g^*$;*
2. *Si f, g satisfont $f^* = g^*$ et $A_0(f) = A_0(g)$, alors f, g sont équivalentes.*

Démonstration. (1) Supposons $f \sim g$. Par définition de l'équivalence, il existe une constante C tel que $|f-g| \geqslant C$.

Soit $x \in A$. Par le lemme 3.24, $f^*(x) \geqslant m$ s.s.i. il existe $k(x)$ tel que $f(x^n) \geqslant mn - k(x) \quad \forall n$. On a donc $g(x^n) \geqslant mn - k(x) - c$. On obtient donc $g^*(x) \geqslant m$. Par symétrie, $f^* = g^*$.

(2) Supposons $f^* = g^*$ et $A_0(f) = A_0(g)$. D'après le corollaire 3.25, on a $G(f^*) = G^*(f) = G^*(g) = G(g^*)$. Notons que $G(g)$ est de type fini sur $A_0(f) = A_0(g)$ (autant qu'une algèbre), il existe une constante C que $G(g) \subseteq u^{-C}G(f)$ et ceci implique que $g(x) \geqslant f(x) - C$. Par symmétrie, $f \sim g$. □

Corollaire 3.33. *Soit f, g deux filtrations noetheériennes positives sur un anneau noethérien A, alors f, g sont équivalentes s.s.i. $f^* = g^*$.*

4
ANNEAUX DE VALUATION, ANNEAUX DE KRULL

4.1 Groupe de valuation et Anneaux de valuation

Généralisons d'abord la définition de valuation :

Définition 4.1. Soit C un corps. Une **valuation** sur C (ou une C**-valuation**) est un homomorphisme de groupes v du groupe multiplicatif $C^* = C \backslash \{0\}$ vers un groupe abélien totalement ordonné G (écrit additivement) tel que pour tous x et y dans C tels que $x + y \neq 0$,

$$v(x+y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}.$$

Il découle immédiatement des propriétés des homomorphismes de groupes que $v(1) = 0$, et que pour tout $x \in K\backslash\{0\}$, $v(x^{-1}) = -v(x)$.

Lorsque R est un domaine intègre de corps des fractions K et G un groupe abélien totalement ordonné, une fonction $v : R\backslash\{0\} \to G$ vérifiant les propriétés

$$v(xy) = v(x) + v(y), \quad v(x+y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}$$

pour tous $x, y \in R$ peut être étendue uniquement à une valuation $v : K\backslash\{0\} \to G$ en posant $v\left(\frac{x}{y}\right) = v(x) - v(y)$ pour $x, y \in R$ non nuls. On vérifie facilement que cette définition est cohérente et produit une valuation sur K. Pour cette raison, on appelle parfois une telle fonction « partielle » $v : R\backslash\{0\} \to G$ une **valuation**.

Par convention, on étend v à K en posant $v(0) = \infty$, où $G \cup \{\infty\}$ est totalement ordonné avec les relations $\infty + g = g + \infty = \infty + \infty = \infty$ et $g < \infty$ pour tout $g \in G$.

Définition 4.2 (groupe de valuation)**.** Soit C un corps et v une C-valuation. Alors, l'image

$$\Gamma_v = v(C^*)$$

de v est un groupe abélien totalement ordonné, appelé le *groupe des valeurs* de v.

Définition 4.3 (anneau de valuation)**.** Soit C un corps. Un anneau de valuation sur C, ou simplement un anneau de valuation ou un domaine de valuation, est un anneau intègre V dont le corps des fractions est C, et qui satisfait la propriété suivante : $\forall x \in C^*$, soit $x \in V$, soit $x^{-1} \in V$.

L'ensemble des idéaux d'un domaine de valuation V est totalement ordonné par inclusion. En effet, si I et J sont deux idéaux de V et $x \in I\backslash J$, alors pour tout élément non nul $y \in J$, soit $xy^{-1} \in V$, soit $yx^{-1} \in V$. Si $xy^{-1} \in V$, alors $x = (xy^{-1})y \in J$, ce qui est une contradiction. Ainsi, pour tout $y \in J$, $yx^{-1} \in V$, ce qui implique $y = (yx^{-1})x \in I$, et donc $J \subseteq I$.

Il s'ensuit qu'un anneau de valuation V possède un unique idéal maximal, qui est l'idéal de tous les éléments non inversibles :

$$\left\{\, x \in V \,\middle|\, x^{-1} \notin V \,\right\}.$$

L'idéal maximal est généralement noté m_V.

On peut construire un domaine de valuation à partir d'une valuation : étant donnée une valuation $v : k^* \to G$, on définit

$$A_v = \{\, r \in C^* \mid v(r) \geqslant 0 \,\} \cup \{0\}.$$

Il est facile de voir que A_v est un sous-anneau de C avec un unique idéal maximal

$$\mathfrak{m}_v = \{\, r \in C^* \mid v(r) > 0 \,\},$$

et qu'il s'agit d'un domaine de valuation. En effet, si $x \in A_v \backslash \mathfrak{m}_v$, alors $v(x) = 0$ et $v(1/x) = -v(x) = 0$ donc x est inversible dans A_v.

Définition 4.4. On appelle A_v **l'anneau de valuation** correspondant à la valuation v. Son idéal maximal $\mathfrak{m}_v = \{\, r \in C^* \mid v(r) > 0 \,\}$ est appelé le **centre** de la valuation. On appelle le corps résiduel de A_v le corps $\kappa(v) = A_v/\mathfrak{m}_v$ ou $\kappa(V)$ avec $V = A_v$.

Si v et w sont des valuations équivalentes, alors évidemment $A_v = A_w$.

Lemme 4.5. *Soit V un domaine de valuation dont le corps des fractions est C. Soit*

$$\Gamma_V = C^*/V^*,$$

où $V^* \subseteq C^*$ désigne les groupes multiplicatifs des éléments inversibles, et soit $v : C^* \to \Gamma_V$ l'homéomorphisme de groupes naturel. Par convention, l'opération sur Γ_V est notée $+$. Alors Γ_V est un groupe abélien totalement ordonné, v est une C-valuation, et Γ_V est le groupe des valeurs de v.

Démonstration. Puisque C^* est abélien pour la multiplication, Γ_V l'est également. Nous ordonnons Γ_V comme suit : pour $x, y \in C^*$ d'images $\alpha, \beta \in \Gamma_V$, on définit $\alpha \leqslant \beta$ lorsque $yx^{-1} \in V$.

Vérifions que $\leqslant$ est un ordre total :

— Pour tout $\alpha = xV^* \in \Gamma_V$, on a $xx^{-1} = 1 \in V$, donc $\alpha \leqslant \alpha$.

— Si $\alpha \leqslant \beta$ et $\beta \leqslant \alpha$, alors pour x, y représentants, $yx^{-1} \in V$ et $xy^{-1} \in V$, donc $yx^{-1} \in V^*$ et $\alpha = \beta$.

— Si $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ via x, y, z, alors $zx^{-1} = (zy^{-1})(yx^{-1}) \in V$ donc $\alpha \leqslant \gamma$.

— Compatibilité : Si $\alpha \leqslant \beta$ alors $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$ car $(yz)(xz)^{-1} = yx^{-1} \in V$.

— Pour tout α, β, soit $yx^{-1} \in V$ (donc $\alpha \leqslant \beta$), soit $xy^{-1} \in V$ (donc $\beta \leqslant \alpha$).

Montrons que v est une valuation : On a $v(xy) = v(x) + v(y)$ par construction. De plus, pour $x, y \in C^*$, soit $xy^{-1} \in V$ alors $(x + y)y^{-1} = xy^{-1} + 1 \in V$ donc $v(x + y) \geqslant v(y)$, soit $yx^{-1} \in V$ alors de même $v(x + y) \geqslant v(x)$. Dans les deux cas $v(x + y) \geqslant \min(v(x), v(y))$.

On conclut que v est bien une valuation à valeurs dans Γ_V, qui est un groupe abélien totalement ordonné. □

Proposition 4.6. *Un domaine de valuation V est intégralement clos.*

Démonstration. Soit x un élément du corps des fractions de V tel que $x^n + r_1x^{n-1} + \cdots + r_n = 0$ pour certains $r_i \in V$.

Si $x \in V$, alors $x^{-1} \in V$, ce qui implique que $1 + r_1x^{-1} + \cdots + r_nx^{-n} = 0$, et donc que 1 appartient à l'idéal $x^{-1}V$. Ainsi, x^{-1} est inversible dans V, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $x \in V$.

Par définition, il en découle que tout anneau situé entre un domaine de valuation K-valuation et K lui-même est également un domaine de valuation. Ainsi, les over-rings des domaines de valuation sont particuliers. □

Lemme 4.7. *Soit V un domaine de valuation. Soit I un idéal de V engendré par un ensemble fini de générateurs G de I. Alors il existe $z \in G$ tel que $zV = I$.*

Démonstration. On va le montrer par récurrence.Initialisation : Soient $x, y \in V$ non nuls. Alors soit $xy^{-1} \in V$, soit $yx^{-1} \in V$, ce qui implique $x \in yV$ ou $y \in xV$. Hérédité : Supposons que tout idéal de Vgénéré par n éléments est de la forme $I = zV$ avec z un de ces éléments. Alors soit $J = (v_1, ..., v_n, v_{n+1})$ généré par $n + 1$ éléments. L'idéal $j = (v_1, ..., v_{n+1})$ est généré par n éléments, donc il existe i tel que $j = v_iV$ donc $J = (v_i, v_{n+1})$ puis d'après l'initialisation il existe $k \in i, n + 1$ tel que $J = v_kV$ Donc on a bien prouvé le lemme par récurrence. □

Définition 4.8. Soit R un anneau commutatif noethérien et $I \subsetneq R$ un idéal propre. La **hauteur** de I, notée $\mathrm{ht}(I)$, est définie par :

$$\mathrm{ht}(I) = \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R),\ I \subseteq \mathfrak{p} \text{ et } \mathfrak{p} \text{ est minimal pour cette inclusion}\}$$

où pour un idéal premier $\mathfrak{p}$, sa hauteur est la longueur maximale d d'une chaîne d'idéaux premiers :

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$$

Définition 4.9. On définit la dimension (de Krull) d'un anneau comme la borne supérieure de hauteur d'un idéal premier de cet anneau. On dit qu'un anneau est unidimensionnel s'il est de dimension 1, et alors tous ses idéaux premiers sont minimaux.

Proposition 4.10. *Soit $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local, C son corps des fractions, et $A \neq C$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est un anneau de valuation Noethérien.

(2) A est un anneau principal.

(3) A est Noethérien, unidimensionnel, et intégralement clos.

(4) $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = 0$ et $\mathfrak{m}$ est principal.

(5) A est un anneau de valuation dont le groupe des valeurs est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Nous démontrons l'équivalence par les implications cycliques suivantes :

$$\boxed{(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (5) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)}$$

(1) implique (2) par le lemme 4.7. Et évidemment (2) implique (1).

(2) implique (5) : Supposons $\mathfrak{m} = (x)$. Prenons $a \in A$, d'après le théorème d'intersection de Krull (théorème A.11), il exite un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \in \mathfrak{m}^n$ mais $a \notin \mathfrak{m}^{n+1}$, définissons $v(a) := n$. Alors $v(x) = 1$ et le groupe des valeurs est $\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si (5) est vrai, soit $v : C^* \to \mathbb{Z}$. Soit $x \in C$ avec $v(x) = 1$. Pour tout idéal non nul I, il existe $y \in I$ avec $v(y) = n \in \mathbb{N}$ tel que n minimal. Alors yx^{-n} est une unité, donc $I = x^n A$, et A est principal. Ainsi, (2) est vérifié.

(1) implique (3) : par proposition 4.6, A est intégralement clôs.

Montrons que A est unidimensionnel. On a montré que (1) implique (2) et (2) implique (5), remarquons que dans l'implication (5) $\Rightarrow$ (2) on a montré que tout idéal non nul I de A s'écrit comme $I = x^n A$ avec $v(x) = 1$ pour certain $n \in \mathbb{N}$. On a forcément $\mathfrak{m} = xA$ et donc $I = \mathfrak{m}^n$. On conclut que le seul premier de hauteur 1 est $\mathfrak{m}$, donc A est unidimensionnel.

(3) implique (4) : puisque l'anneau est unidimensionnel donc $\mathfrak{m}$ est minimal donc d'après proposition 2.34 il est principal, et l'assertion sur l'intersection découle du théorème d'intersection de Krull (théorème A.11).

Supposons (4). Soit $x \in A$ tel que $\mathfrak{m} = xA$. Soit I un idéal non nul propre de A et y un élément non nul dans I. Par propreté de I, il existe $r_1 \in A$ tel que $y = r_1 x$. Par induction, on construit des $r_n \in A$ tels que $y = r_n x^n$. Comme $\bigcap_i \mathfrak{m}^i = 0$, il existe n tel que $r_n \notin \mathfrak{m}$. Ainsi, $yA = x^n A$. Choisissant y avec n minimal, $I = x^n A = yA$ est principal, donc (4) implique (2). □

4.2 Anneaux de Krull

Les clôtures intégrales d'anneaux noethériens ne sont pas nécessairement noethériennes (pour la construction d'un tel anneau de dimension quelconque, veuillez consulter la proposition 3.1 de [Huc76]). Néanmoins, la clôture intégrale d'un anneau noethérien possède certaines propriétés intéressantes, que l'on va démontrer dans cette section.

Définition 4.11. Un anneau intègre A est un **anneau de Krull** si

1. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de hauteur un, $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau noethérien intégralement clos,
2. $A = \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}$, et
3. Tout élément non nul $x \in A$ appartient à un nombre fini d'idéaux premiers de A de hauteur un.

Les anneaux de Krull ne sont pas nécessairement noethériens. Ils sont toujours intégralement clôs car, pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur un dans A, $A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos, donc leur intersection A est intégralement close. Et on a l'inverse lorsque A est Noethérien :

Proposition 4.12. *Un anneau intègre noethérien intégralement clos est un anneau de Krull.*

Démonstration. Soit A un anneau intègre noethérien intégralement clos. Montrons d'abord la propriété (1) dans la définition des anneaux de Krull (définition 4.11). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 dans A.

Puisque A est noethérien, toute localisation $A_{\mathfrak{p}}$ est noethérienne (proposition 2.6)

Montrons que $A_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos. Soit K le corps des fractions de A (et donc aussi de $A_{\mathfrak{p}}$). Considérons $\alpha \in K$ entier sur $A_{\mathfrak{p}}$. Il existe une relation :

$$\alpha^n + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}\alpha^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{s_0} = 0 \quad \text{avec } a_i \in A, s_i \in A \backslash \mathfrak{p}.$$

En multipliant par $s = \prod s_i^{n-i}$, on obtient que $s\alpha$ est entier sur A. Comme A est intégralement clos, $s\alpha \in A$, donc $\alpha = \frac{s\alpha}{s} \in A_{\mathfrak{p}}$.

Montrons maintenant la propriété (3) dans la définition 4.11. Soit $x \in A$ non nul. Les idéaux premiers de hauteur 1 contenant x correspondent aux idéaux premiers minimaux contenant (x). Par théorème 1.5, dans un anneau noethérien, l'idéal (x) est inclus dans un nombre fini d'idéaux premiers minimaux sur x, donc x appartient à un nombre fini d'idéaux premiers de hauteur 1, ce qui conclut.

Montrons finalement la propriété (2). On a évidemment l'inclusion

$$A \subseteq \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}$$

car pour tout $\mathfrak{p}$, on a $A \subseteq A_{\mathfrak{p}}$ par la remarque 2.3 puisque $1 \notin \mathfrak{p}$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $\alpha \in \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}$. On veut montrer que $\alpha \in A$. Comme α est dans le corps des fractions K de A, on peut écrire $\alpha = \frac{x}{y}$ avec $x, y \in A$, $y \neq 0$. On considère l'idéal des dénominateurs :

$$J = (yA :_A x) = \{a \in A \mid ax \in yA\}$$

Lemme 4.13. *Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1, on a $J \nsubseteq \mathfrak{p}$.*

Démonstration. On a $\alpha = \frac{x}{y} \in A_{\mathfrak{p}}$, donc il existe $s \notin \mathfrak{p}$ tel que $sx \in yA$. Ainsi, $s \in J$ mais $s \notin \mathfrak{p}$, d'où $J \nsubseteq \mathfrak{p}$. □

Lemme 4.14. *Les idéaux premiers associés à J sont tous de hauteur 1.*

Démonstration. Les idéaux premiers associés à J sont également associés à yA , puisque : Si $a \in J$ alors $ax \in yA$, donc si pour $m \in A$ $ma = 0$, alors $max = 0$ de même si $max = 0$ (dans A/J) alors $ma \in J$ d'où $ann_A(a$ dans $A/J) = ann_A(ax$ dans $yA)$ donc les idéaux premiers associés à J sont aussi associés à yA. Or par proposition 2.34 les premiers associés de yA sont exactement les premiers minimaux de yA.

Dans un anneau noethérien intègre et intégralement clôs, les idéaux premiers minimaux sur un élément non nul sont de hauteur 1 (voir la démonstration de proposition 2.34). Ce qui conclut. □

Revenons sur la démonstration de la proposition 4.12. D'après le premier lemme, J n'est contenu dans aucun idéal premier de hauteur 1. D'après le second lemme, tous les idéaux premiers associés à J seraient de hauteur 1 s'ils existaient. Or J est inclus dans ses idéaux associés (car pour $x \in A$tout élément de $ax \in J$) Donc J n'a aucun idéal premier associé, en particulier $Ann_A(1 \text{ dans } A/J) = A$, ce qui implique $J = A$. Par conséquent, $1 \in J$, donc $x \in yA$ et $\alpha = \frac{x}{y} \in A$. Ceci prouve l'inclusion inverse :

$$\bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}} \subseteq A$$

□

On va donner l'énnoncé du théorème de Mori-Nagata, que l'on admettra pour la suite, les intéressés peuvent consulter théorème 4.10.5 de [Ree88] ou théorème 3.21 de [SH06] pour une démonstration.

Théorème 4.15 (Mori-Nagata)**.** *La clôture intégrale A^* d'un anneau noethérien réduit A dans son anneau total de fractions est un produit direct de r anneaux de Krull, où r est le nombre d'idéaux premiers minimaux de A.*

5
VALUATIONS DE KRULL, THÉORÈME DE VALUATION DE REES

L'objectif de cette section est de conclure en donnant une démonstration du théorème de Rees.

Théorème 1 (Rees 1956)**.** *Soient A un anneau noethérien et f une filtration sur un anneau noethérien. Alors il existe de manière unique $r \in \mathbb{N}, e_1, \cdots, e_r \in \mathbb{Q}$ et les valuations surjectives $v_1, \cdots, v_r$ à valeur dans $\mathbb{Z}$, tels que*

$$f^{\text{hom}}(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant r} \left(\frac{v_i}{e_i} \right).$$

et tels que l'écriture du minimum en termes de ces r valuations est irréductible.

5.1 Valuation de Krull sur un anneau noethérien intègre

Nous prouverons ce théorème par étapes. Dans cette section, nous supposons que A est un anneau intègre noethérien, puis nous étendrons dans la section suivante au cas non nécessairement intègre.

Dans un premier temps, nous allons établir des conséquences du théorème 4.15 en termes de valuations.

Remarque 5.1. Si A est un anneau intègre, alors (0) est un idéal premier, donc il y a un unique idéal premier minimal dans A. Le théorème de Mori-Nagata implique donc que A^* est un anneau de Krull.

Rappelons également la définition suivante :

Définition 5.2. La **dimension de Krull** de A, notée $\dim(A)$, est le sup, éventuellement infini, des longueurs n des chaînes strictement croissantes d'idéaux premiers :

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

où chaque $\mathfrak{p}_i$ est un idéal premier de A.

La notion d'idéal premier de hauteur 1, introduite dans la définition 4.8, est primordiale dans le théorème de Mori-Nagata (théorème 4.15), étant donné qu'il est question d'anneaux de Krull. Il est alors facile de se convaincre qu'il serait utile d'établir une correspondance bijective entre ces idéaux et un certain type de valuation. Le but sera donc, dans un premier temps, de construire ces valuations. En voici la définition, dont la construction sera justifiée en-dessous :

Définition - Proposition 5.3. Soit k le corps des fractions de A. Soit v une valuation à valeurs entières sur k, positive sur A. On dit que v est une **valuation de Krull** sur A si d'une part son centre $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_v$ (introduit dans la définition 4.4) est un idéal premier de hauteur 1 de A^*, d'autre part son domaine de valuation A_v est la localisation de A^* en $\mathfrak{m}_v$ et si $v(\pi) = 1$ où π est un générateur de $\mathfrak{p}A^*_p$.

Remarque 5.4. Le fait que $\mathfrak{p}$ soit un idéal de A^* est pratique parce que maintenant si $v(x) \neq 0$ alors $x \in \mathfrak{p}$

Démonstration. Ici, on a affirmé que $\mathfrak{p}A^*_\mathfrak{p}$ était principal, et nous allons tâcher de montrer pourquoi.

D'après la proposition 4.10 dont nous allons utiliser le deuxième point, il suffit de montrer que $A^*_\mathfrak{p}$ est local, d'idéal maximal $\mathfrak{p}A^*_\mathfrak{p}$, que $A^*_\mathfrak{p}$ est noethérien, de dimension 1 et intégralement clos. Les deux premiers points sont déjà montrés grâce à la proposition 2.5. Le fait que $A^*_\mathfrak{p}$ soit noethérien intégralement clos découle du théorème de Mori-Nagata, qui nous dit que A^* est un anneau de Krull. Reste à démontrer que $A^*_\mathfrak{p}$ est de dimension 1.

Nous avons vu grâce au théorème 2.10 la correspondance bijective entre d'une part, les idéaux premiers de $A^*_\mathfrak{p}$ et ceux de $A*$ contenus dans $\mathfrak{p}$. Elle se matérialise par la surjection canonique $\Phi_\mathfrak{p} : A^* \to A^*_\mathfrak{p}$. En d'autres termes, à chaque chaîne

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

d'idéaux premiers dans $A^*_\mathfrak{p}$, correspond une chaîne

$$\Phi_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{p}_0) \subsetneq \Phi_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{p}_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \Phi_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{p}_n)$$

d'idéaux premiers de A^* contenus dans $\mathfrak{p}$, de même longueur. Comme $\mathfrak{p}$ est de hauteur 1, on en déduit que la dimension de $A^*_\mathfrak{p}$ est 1. Nous avons alors toutes les hypothèses de la proposition 4.10. Ce résultat vaut pour tout idéal premier de A^* de hauteur 1. □

Maintenant, il nous reste à montrer que l'on a bien une correspondance bijective entre les idéaux premiers de hauteurs 1 de A^* et les valuations de Krull.

Proposition 5.5. *On a une correspondance bijective entre les valuations de Krull sur A et les idéaux premiers de hauteur 1 sur A^* $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p}$ soit le centre de v et $A^*_\mathfrak{p}$ soit le domaine de valuation de v.*

Démonstration. Par définition, si v est une valuation de Krull, alors son centre est de hauteur 1 (le centre d'une valuation étant introduit en définition 4.4) par la définition - Proposition 5.3.

Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A^* de hauteur 1. Nous allons construire une valuation de Krull ayant pour centre $\mathfrak{p}$.

Notons π un générateur de l'idéal principal $\mathfrak{p}A^*_\mathfrak{p}$. Pour $x \in A^*_\mathfrak{p}$, on écrit $x = u\pi^n$ avec n un entier naturel maximal, et u inversible (puisque $\mathfrak{p}A^*_\mathfrak{p}$ est maximal d'après la proposition 2.5), et on note alors $w(x) = n$. Si $x = 0$, on note $w(0) = \infty$. On a clairement une valuation à valeurs entières sur $A^*_\mathfrak{p}$. Puis pour $x \in A^*$ on note $v(x) = w(\Phi_\mathfrak{p}(x))$, où $\Phi_\mathfrak{p}$ est le morphisme naturel de A^* dans $A^*_\mathfrak{p}$ introduit à la fin de la définition 2.1.

On a par construction $A_v = A^*_\mathfrak{p}$ et $m_v = \mathfrak{p}$. On voit qu'en fixant $v(\pi) = 1$, on a l'unicité. En étendant v sur le corps des fractions de A on a bien que v est une valuation de Krull de centre $\mathfrak{p}$. □

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, qui peut être vu comme une réinterprétation du théorème de Mori-Nagata avec des valuations :

Théorème 5.6. *Soit A un anneau intègre noethérien, soit k son corps des fractions. Alors l'ensemble des valuations de Krull sur A vérifie*

- *Si $x \in A\backslash\{0\}$, alors $v(x) \neq 0$ seulement pour un nombre fini de valuations de Krull v sur A ;*
- *Si $x \in k$ alors x est entier sur A si et seulement si $v(x) \geqslant 0$ pour toute valuation de Krull v sur A ;*
- *On a une correspondance bijective entre les valuations de Krull sur A et les idéaux premiers de hauteur 1 sur A^* $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p}$ soit le centre de v et $A^*_\mathfrak{p}$ soit le domaine de valuation de v.*

Démonstration. Le dernier point a déjà été montré. Pour le premier point, le théorème de Mori-Nagata montre que A^* est un anneau de Krull (remarque 5.1) donc en particulier x appartient à un nombre fini d'idéaux premiers de hauteur 1 de A^* et on conclut avec la correspondance bijective avec les valuations de Krull énoncée au dernier point. Pour le deuxième point, comme A^* est de Krull on a pour $x \in k$

$$x \in A^* \iff x \in \bigcap_{ht(\mathfrak{p})=1} A^*_\mathfrak{p}$$

donc x est intégral sur A si et seulement si $x \in A^*_\mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p}$ idéal premier de hauteur 1 de A^*, si et seulement si $x \in A_v$ pour toute valuation de Krull par le dernier point. □

Poursuivons notre route vers le théorème, tout en restant dans un premier temps avec des anneaux **intègres**. Voici d'abord une notion qui va nous être utile :

Définition 5.7 (Répétition de l'exemple 3.15)**.** Soit A un anneau noethérien intègre. Soit I un idéal de A_0, lui même un sous-anneau de A, tels que $\forall x \in A, \exists n \in \mathbb{Z}, I^n x \subseteq A_0$. Soit $x \in A$. On note

$$f_I(x) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{Z}, x \in I^n\} & \text{si un tel entier est défini et } x \in A_0, \\ \infty & \text{si } \forall n \in \mathbb{Z}, x \in I^n \text{ et } x \in A_0, \\ -n & \text{où } n = \min\{k \in \mathbb{Z}, I^k x \subseteq A_0\} \text{ si } x \notin A_0 \end{cases}$$

Alors f_I est une filtration sur A. Si $I = aA_0$ est principal avec a un élément régulier de A_0 et $A = A_{0(a)}$ (c'est-à-dire un non diviseur de zéro), on note la filtration f_a, et on l'appelle **filtration principale** sur A.

Dans le lemme suivant, nous démontrons d'abord le théorème de Rees (théorème 1) au cas où f est une filtration principale. Comme nous le verrons, le théorème général se prouve par réduction à ce cas. En d'autres termes, nous démontrons le théorème 1 d'abord pour le cas de filtration principale dans le cas intègre. Rappelons que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier d'un anneau A_0, on note $(A_0)_{\mathfrak{p}}$ la localisation de A_0 en le complémentaire de $\mathfrak{p}$, qui est stable par multiplication.

Lemme 5.8. *Soit A_0 un anneau noethérien intègre, soit u un élément régulier de A_0. Soit $A = A_{0(u)}$. Notons f_u la filtration principale définie sur A par u, A_0. Soient $V_1, ..., V_k$ les valuations de Krull sur A_0 telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}, V_i(u) > 0$, existant d'après le théorème précédent. Alors, si $x \in A$:*

(i) $f_u^*(x) \geqslant n \iff \forall i, V_i(x) \geqslant nV_i(u)$ *;*

(ii) $f_u^{\hom}(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \dfrac{V_i(x)}{V_i(u)}$*, la représentation en fonction du minimum des valuations étant irréductible ;*

(iii) $f_u^*(x) = \lfloor f_u^{\hom}(x) \rfloor$

Démonstration. Nous avons que $f_u(x) = \max\{k \in \mathbb{N}, u^{-k}x \in A_0\}$. Dans le cas fini, notons n cet entier. Alors par définition de f_u^* :

$$f_u^*(x) \geqslant n \iff \exists r, \exists a_1, \ldots, a_r \in A_0, x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r = 0$$

avec $f_u(a_i) \geqslant ni$ pour tout i. En multipliant l'égalité polynômiale sur x par u^{-nr} on obtient

$$(u^{-n}x)^r + u^{-n}a_1(u^{-n}x)^{r-1} + \cdots + u^{-nr}a_r = 0$$

et donc que c'est équivalent à $u^{-n}x \in A_0^*$. En effet le coefficient devant $(u^{-n}x)^i$ est $a_i u^{-ni}$ qui est bien dans A_0 puisque $f_u(a_i u^{-ni}) \geqslant ni - ni \geqslant 0$. Or d'après le deuxième point du théorème 5.6, ceci est équivalent à dire que $\forall i \in \{1 \ldots, k\}, V_i(u^{-n}x) \geqslant 0$ ou $\forall i \in \{1 \ldots, k\}, V_i(x) \geqslant nV_i(u)$ (comme c'est vrai pour les autres valuations de Krull, ie celle qui annulent u), ce qui prouve le premier point.

Prouvons les deux autres en même temps. Réécrivons ce que nous venons de montrer sous la forme

$$f_u^*(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \left\lfloor \frac{V_i(x)}{V_i(u)} \right\rfloor$$

Soit $g(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \dfrac{V_i(x)}{V_i(u)}$. Nous allons montrer par double inégalité qu'elle est égale à $f_u^{\hom}(x)$. D'après le fait suivant la définition 3.5, g est une filtration homogène et d'après lemme 3.21, $g(x) \geqslant f_u^*(x) \geqslant f_u(x)$. Donc $g(x) \geqslant f_u^{\hom}(x)$ (Il suffit de remplacer x par x^n/n dans l'inégalité précédente et de faire tendre n vers l'infini).

Pour l'autre côté, choisissons n un multiple des entiers $V_i(u)$. Alors

$$f_u^*(x^n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{nV_i(x)}{V_i(u)}$$

car cette fraction est un entier. À nouveau par le lemme 3.21,

$$f_u^{\hom}(x^n) \geqslant f_u^*(x^n) = n \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \frac{V_i(x)}{V_i(u)} = ng(x)$$

et comme f_u^{hom} est homogène on a

$$f_u^{\text{hom}}(x) \geqslant g(x)$$

ce qui conclut.

Il nous reste à montrer l'irréductibilité de l'écriture. Pour $j \in \{1, \ldots, k\}$ notons $\mathfrak{p}_j$ le centre de V_j sur $A_0^* \cap A$.

D'après le théorème 5.6, ce sont des idéaux premiers distincts de hauteur 1. Aucun ne contient alors un autre. Donc pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ est fixé, pour tout $j \neq i$ nous pouvons trouver z_{ij} dans $\mathfrak{p}_j \backslash \mathfrak{p}_i$. Soit $y_i = \prod_{j \neq i} z_{ij}$, alors

$$y_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j \backslash \mathfrak{p}_i$$

donc $V_j(y_i) > 0$ si $j \neq i$, et $V_i(y_i) = 0$. Comme $y_i \in A$ nous pouvons écrire $y_i = \dfrac{x_i}{u^n}$ où $x_i \in A_0$ et $n \in \mathbb{N}$, alors le fait que $V_j(y_i) > 0$ si $j \neq i$, et $V_i(y_i) = 0$ se réécrit

$$\frac{V_i(x_i)}{V_i(u)} = n < \frac{V_j(x_i)}{V_j(u)}$$

ce qui montre l'irréductibilité de l'écriture et achève la preuve. □

5.2 Cas non nécessairement intègre

Nous allons dans cette section prouver un théorème qui est une version du lemme dans le cas non intègre, mais toujours avec la filtration principale.

En premier lieu, étendons la définition de valuation de Krull dans le cas non intègre :

Définition 5.9. Soit V une valuation à valeurs entières sur un anneau noethérien A. On dit que V est une valuation de Krull sur A si elle est de la forme

$$V(x) = W(\theta_{\mathfrak{p}}(x))$$

où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal de A, $\theta_{\mathfrak{p}}$ est la réduction modulo $\mathfrak{p}$: $A \longrightarrow A/\mathfrak{p}$ et W est une valuation de Krull sur $A/\mathfrak{p}$ (qui est intègre). $\mathfrak{p}$ est l'ensemble des $x \in A$ tels que $V(x) = \infty$ et est appelé l'**idéal limite** de V.

Alors, le premier point du théorème 5.6 devient

Théorème 5.10. *Si $x \in A$ n'appartient à aucun idéal premier minimal de A alors $V(x) \neq 0$ seulement pour un nombre fini de valuations de Krull V sur A.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A. Si x n'appartient à aucun idéal premier minimal , alors $x \notin \mathfrak{p}$, donc $x \neq 0$ dans $A/\mathfrak{p}$ et il existe un nombre fini valuation de Krull Wsur $A/\mathfrak{p}$, tel que $W(x) \neq 0$ d'après théorème 5.6, donc il existe un nombre fini de valuations de Krull de A de la forme $V(x) = W(\theta_{\mathfrak{p}}(x))$ tel que $V(x) = 0$. Donc puisqu'il y a un nombre fini d'idéaux premier minimaux dans un anneau noethérien, ça conclut. □

Remarque 5.11. Si u est un élément régulier de A, alors u n'appartient à aucun idéal premier minimal de A, et le théorème précédent s'applique. En effet si u appartenait à un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{p}$ serait associé à A. Il existerait alors $x \in A_0$ tel que $\operatorname{Ann}_A x = \mathfrak{p}$. Puisque $u \in \mathfrak{p}$ on aurait $ux = 0$ donc $x = 0$ ce qui est absurde.

Nous avons maintenant le cadre pour citer le théorème suivant :

Théorème 5.12. *Soit A_0 un anneau noethérien, soit u un élément régulier de A_0. Soit $A = A_{0(u)}$. Soient $V_1, ..., V_k$ les extensions à A des valuations de Krull sur A_0 telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}, V_i(u) > 0$, existant d'après la remarque précédente. Alors, si $x \in A$:*

(i) $f_u^*(x) \geqslant n \iff \forall i, V_i(x) \geqslant nV_i(u)$;

(ii) $f_u^{\hom}(x) = \min_{1\leqslant i\leqslant k} \dfrac{V_i(x)}{V_i(u)}$, *la représentation en fonction du minimum des valuations étant irréductible ;*

(iii) $f_u^*(x) = \lfloor f_u^{\hom}(x) \rfloor$

Démonstration. Regardons le premier point dans un premier temps. Le théorème 1.5 nous permet de noter $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers minimaux de A_0.

Le lemme 3.28 permet d'avoir

$$f_u^*(x) = \min_{1\leqslant i\leqslant s} (f_u/\mathfrak{p}_i A)^*(x_i), \text{ où } x_i = x + \mathfrak{p}_i \in A/\mathfrak{p}_i.$$

Notons u_i, x_i les images de u, x dans $A/\mathfrak{p}_i A$. Alors $f_u/\mathfrak{p}_i A$ est la filtration principale f_{u_i} sur $(A_0/\mathfrak{p}_i)_{(u_i)} = A/\mathfrak{p}_i A$. Notons W_{ij} pour $j \in \{1, \ldots, k_i\}$ les valuations de Krull sur $A_0/\mathfrak{p}_i$ telles que $W_{ij}(u_i) > 0$ pour $i \in \{1, \ldots, s\}$. Elles existent car $u_i \neq 0$. Soit maintenant

$$V_m(x) = W_{ij}(x)$$

pour $x \in A$ où θ_i est la réduction modulo $\mathfrak{p}_i : A \longrightarrow A/\mathfrak{p}_i A$, $m = k_1 + \cdots + k_{i-1} + j$ et $k = k_1 + \cdots + k_s$. Alors

$$f_u^*(x) \geqslant m \iff \forall i \in \{1, \ldots, s\}, f_{u_i}^*(x_i) \geqslant n$$

On peut appliquer le lemme 5.8 à ces filtrations principales (sur des anneaux intègres), qui donne que ceci est équivalent à

$$\forall i \in \{1, \ldots, s\}, \forall j \in \{1, \ldots, k_i\}, W_{ij}(x_i) \geqslant nW_{ij}(u_i)$$

qui se réécrit

$$\forall m \in \{1, \ldots, k\}, V_m(x) \geqslant nV_m(u)$$

ce qui prouve le premier point.

Les deux autres points se démontrent ensuite comme dans le lemme 5.8, à part l'affirmation sur l'irréductibilité de l'écriture du minimum des valuations, que nous allons tâcher de montrer ci-dessous.

On doit montrer que pour tout $m \in \{1, \ldots, k\}$ il existe $y_m \in A$ tel que pour tout $j \neq m$:

$$S(m, j) : \frac{V_m(y_m)}{V_m(u)} < \frac{V_j(y_m)}{V_j(u)}$$

soit satisfaite.

Fixons m, et divisons l'ensemble des valeurs de $j \neq m$ en deux ensembles S et S' : S étant l'ensemble des j tels que $V_m(x)$ et $V_j(x)$ prennent la valeur ∞ sur le même idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A, et S' comprenant toutes les autres valeurs de j (différentes de m).

Il découle alors du lemme 5.8 que l'on peut trouver un élément y tel que la propriété $S(m, j)$ soit vérifiée pour tout $j \in S$, avec $y_m = y$.

Ensuite, on peut choisir un élément $z \in A$ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$, mais appartenant à tous les autres idéaux premiers minimaux de A, de sorte que $V_j(z) = \infty$ si $j \in S'$, tandis que $V_j(z)$ est fini si $j \in S$.

On peut donc choisir N tel que :

$$N\left(\frac{V_m(y)}{V_m(u)} - \frac{V_j(y)}{V_j(u)}\right) < \frac{V_j(z)}{V_j(u)} - \frac{V_m(z)}{V_m(u)}$$

pour tout $j \in S$.

Il en découle alors que, si $y_m = y^N z$, la propriété $S(m, j)$ est vérifiée pour tout $j \neq m$, et l'énoncé d'irréductibilité s'en déduit. □

Théorème 5.13. *Soit A un anneau noethérien, et f une filtration noethérienne sur A. Soit A_0 le sous-anneau de A formé des éléments x tels que $f(x) \geqslant 0$.*

Soient $V_1, \ldots, V_k$ les extensions à $G(f)$ des valuations de Krull sur A_0 telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}, V_i(u) > 0$. Soient $v_1, \ldots, v_k$ les normalisations de leurs restrictions à A.

Alors il existe des rationnels strictement positifs $e_1, \ldots, e_k$ tels que :

i) $f^*(x) \geqslant n$ *si et seulement si* $v_i(x) \geqslant ne_i$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$,

ii) $f^{\text{hom}}(x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \dfrac{v_i(x)}{e_i}$, *la représentation étant irréductible*

iii) $f^*(x) = \lfloor f^{\text{hom}}(x) \rfloor$.

Démonstration. On applique le théorème 5.12 en prenant $A_0 = G(f)$ et $A = G(f)[t, u]$. En effet on a $A[t, u] = G(f)_{(u)}$. (Rappelons remarque 3.30) On considère la filtration principale f_u sur $A[t, u]$.

Nous pouvons appliquer proposition 4.10 : le dernier point nous dit que le groupe des valeurs des V_i sont isomorphes à $\mathbb{Z}$ (si V_i prend des valeurs finies non nulles).

Les $v_1, \ldots, v_k$ sont les normalisations des restrictions des $V_1, \ldots, V_k$ à A, c'est-à-dire :

— si V_i prend uniquement les valeurs 0 ou ∞ sur A, alors $v_i = V_i$,

— sinon, si $V_i(x)$ prend des valeurs multiples d'un entier positif m_i, alors $v_i = \frac{1}{m_i} V_i$.

Par ailleurs, affirmons que f est la restriction de $f_u(x)$ à A. Donnons-en une justification : A est l'ensemble des éléments de $A[t, u]$ de degré 0. Soit $x \in A$. Si $x \in G(f)$, alors $f_u(x) = \max\{n \in \mathbb{N}, xt^n \in G(f)\} = f(x)$ par définition de $G(f)$. Si $x \notin G(f)$, $f_u(x) = -\min\{n \in \mathbb{N}, u^n x \in G(f)\} = f(x)$ encore une fois. On a donc bien que f est la restriction de f_u à A. Ce fait est crucial puisqu'il permet d'appliquer les théorèmes précédents directement.

On a également que $f^*(x)$ et $f^{\text{hom}}(x)$ sont les restrictions respectives de $f_u^*(x)$ et $f_u^{\text{hom}}(x)$ à A.

On peut donc écrire la conclusion (i) du théorème 5.12 sous la forme :

$$f^*(x) \geqslant n \iff v_i(x) \geqslant ne_i, \quad \text{où } e_i = \begin{cases} \frac{V_i(u)}{m_i} & \text{si } v_i(x) \text{ prend des valeurs finies non nulles,} \\ 1 & \text{si } v_i(x) \text{ prend seulement les valeurs 0 ou } \infty. \end{cases}$$

Les e_i sont rationnels et positifs.

Il reste à montrer l'irréductibilité de l'écriture du deuxième point. Soit m il existe un élément que l'on peut supposer homogène $X = xu^r$ avec $x \in A$ tel que

$$\frac{V_m(X)}{V_m(u)} < \frac{V_j(X)}{V_j(u)}$$

si $j \neq m$. Cela entraîne que

$$\frac{v_m(X)}{e_m} < \frac{v_j(X)}{e_j}$$

si $j \neq m$, ce qui conclut.

□

A
APPENDICE

A.1 Les (contre-)exemples de Noethérienité

Dans cette partie, nous allons nous pencher sur quelques exemples intéressants, qui donnent une réponse négative à la question suivante :

Question A.1. *Est-un sous-anneau d'un anneau Noethérien forcément Noethérien ? La propriété de 3-objets est-elle valide pour une suite exacte courte d'anneaux ?*

Exemple A.2. Considérons les anneaux suivants :

- $A_1 := \mathbb{R}[X]$ est Noethérien d'après le théorème de base de Hilbert (théorème 1.9).
- Notons A_2 l'anneau des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$, c'est un anneau qui contient A_1 comme un sous-anneau. On montre que A_2 n'est pas Noethérien :

  Démonstration. Notons I_n l'ensemble des fonctions s'annulant sur $2^n\mathbb{Z}$, on vérifie aisément que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ forme une suite strictement croissante d'idéaux, donc A_2 n'est pas Noethérien. □

- Considérons maintenant A_3 l'anneau des fonctions analytiques sur $[-1,1]$, c'est un anneau qui contient A_2 comme un sous-anneau, et il est Noethérien !

  Démonstration. Pour une fonction f analytique sur $[-1,1]$ non-zéro, l'ensemble des zéros est un ensemble discret. Vue que $[-1,1]$ est compact, cet ensemble est donc fini. On obtient donc que f s'écrit comme le produit d'un polynôme avec un élément inversible, la noethérienité suit du lemme suivant :

  Lemme A.3. *Soit A un anneau, supposons qu'il admet un sous-anneau Noethérien $A_0 \subseteq R$ tel que tous les éléments de R s'écrit comme le produit d'un élément de A_0 avec un élément inversible, alors A est Noethérien.*

  Démonstration de lemme A.3. Soit $I \subseteq A$ un idéal quelconque. Montrons que I est de type fini.
  Considérons $J := I \cap A_0$. Alors, J est un idéal de A_0, donc il est engendré par un nombre fini d'éléments $a_1, \cdots, a_n \in A_0$ car A_0 est Noethérien.
  Soit $a \in I$. Par hypothèse, on écrit $a = a_0 \cdot u$ avec $a_0 \in A_0$ et u inversible. Alors :

  $$a_0 = a \cdot u^{-1} \in J \implies a_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \quad (\lambda_i \in A_0).$$

  En multipliant par u :

  $$a = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot u) a_i \quad \text{où} \quad \lambda_i \cdot u \in A.$$

  Ainsi, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ engendre I. □

□

— Maintenant, voyons l'exemple de l'anneau A_4 des fonctions analytiques sur $]-1,1[$. Il contient A_3 comme sous-anneau, et il n'est pas Noethérien.

Démonstration. Considérons une suite infinie de points distincts $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]-1,1[$ accumulés en 1, par exemple $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Pour chaque $k \geqslant 1$, définissons $I_k = \{f \in A_4 : f(x_{2^k n}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$, alors la chaîne d'idéaux $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \cdots$ ne stationne jamais. Ceci contredit la condition de chaîne croissante. □

— Si on considère A_5 l'anneau des fonctions analytiques au tour de 0, ce qui contient A_4 comme sous-anneau, on trouve que tous les éléments s'écrit comme le produit de x^n avec un élément inversible pour certain n, donc on conlut par lemme A.3 que A_5 est Noethérien.

— Notons A_6 l'anneau des fonctions lisses autour de 0, il contient A_5 comme sous-anneau, mais on peut montrer qu'il n'est pas Noethérien !

Démonstration. Considérons la fonction suivante

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Notons $I_n := (g^{2^{-n}})$. On a $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I_n \subsetneq I_{n+1} \subsetneq \cdots$ est une chaîne strictement croissante d'idéaux, donc A_6 n'est pas Noethérien. □

— On peut construire un autre anneau, l'anneau des séries formelles $A_7 := \mathbb{R}[[x]]$, il contient également A_5 comme sous-anneau, mais différent que A_6, il est Noethérien : tous les éléments s'écrit comme le produit de x^n avec un élément inversible pour certain n comme dans le cas de A_5.

— Considérons finalement l'anneau des séries de Puiseaux

$$A_8 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{R}[[x^{\frac{1}{n}}]].$$

Il contient A_7 comme sous-anneau, et il n'est pas Noethérien : on a une chaîne strictement croissante d'idéaux $(x) \subsetneq (x^{\frac{1}{2}}) \subsetneq (x^{\frac{1}{4}}) \subsetneq \cdots$.

D'après ces exemples, la partie "sous-module" de question A.1 est fausse : un sous-anneau d'un anneau Noethérien n'est pas forcément Noethérien. On va maintenant montrer que la partie "module quotient" est encore valide.

Lemme A.4. *Soient A_1 et A_2 deux anneaux avec un morphisme surjectif $\varphi : A_1 \to A_2$, supposons que A_1 est Noeteérien, alors A_2 est aussi Noethérien.*

Démonstration. Soit $J \subseteq A_2$ un idéal, montrons qu'il est de type fini. Considérons son image réciproque

$$\varphi^{-1}(J) = \{ a \in A_1 \mid \varphi(a) \in J \}.$$

C'est un idéal de A_1. Puisque A_1 est Noethérien, il est engendré par un nombre fini d'éléments $a_1, \cdots, a_n \in A_1$. Puisque φ est surjective, tout élément de J s'écrit comme $\varphi(a)$ avec $a \in \varphi^{-1}(J)$. On a alors

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \quad (\lambda_i \in A_1) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i)\varphi(a_i).$$

Ainsi, J est engendré par $\{\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_n)\}$. □

A.2 Idéaux monomiaux

Dans cette section, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux idéaux moniaux, et cela nous permettra d'illustrer la notion de clôture intégrale avec un exemple très graphique de ce qu'elle représente. Cet exemple est inspiré du livre de L. Swanson et C. Huneke, [SH06]. Pour cela, nous démontrerons la proposition suivante :

Proposition A.5. *L'ensemble des exposants de la clôture intégrale d'un idéal monomial I est exactement l'ensemble des points entiers du réseau contenus dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des exposants de I.*

Commençons alors par définir ce qu'est un idéal monomial.

Définition A.6. Soit k un corps et soient $X_1, \dots, X_d$ des variables sur k. Un *monôme* dans l'anneau de polynômes $k[X_1, \dots, X_d]$ (ou alternativement dans l'anneau des séries entières convergentes $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}$ ou dans l'anneau des séries formelles $k[[X_1, \dots, X_d]]$) est un élément de la forme $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_d^{n_d}$ pour certains entiers naturels $n_1, \dots, n_d$. Un idéal est dit *monomial* s'il est engendré par des monômes.

L'anneau polynomial $k[X_1, \dots, X_d]$ possède une graduation naturelle par $\mathbb{N}^d$ définie par :

$$\deg(X_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^d,$$

avec 1 à la i-ème position et 0 ailleur, et sous cette graduation, les idéaux monomiaux sont homogènes.

Soit I un idéal monomial et soit $r = X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_d^{n_d}$ un monôme appartenant à la clôture intégrale de I. Supposons que r satisfait une équation de dépendance intégrale sur I :

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Comme I est un idéal monomial, homogène sous la graduation naturelle par $\mathbb{N}^d$ sur $k[X_1, \dots, X_d]$, chaque morceau gradué de chaque a_i est également un élément de I^i. En particulier, la partie homogène de l'équation ci-dessus de degré $n(n_1, \dots, n_d)$ est aussi une équation de dépendance intégrale de r sur I.

Ainsi, si b_i désigne la composante homogène de a_i de degré $i(n_1, \dots, n_d)$, alors l'équation

$$r^n + b_1 r^{n-1} + \cdots + b_{n-1} r + b_n = 0$$

est également une équation de dépendance intégrale de r sur I.

Soit i un entier tel que $b_i r^{n-i}$ soit non nul. Comme r^n et $b_i r^{n-i}$ sont tous deux de degré $n(n_1, \dots, n_d)$, et puisque la composante graduée de $k[X_1, \dots, X_d]$ de degré $n(n_1, \dots, n_d)$ est un espace vectoriel de dimension un sur k, il existe une unité $u \in k$ telle que $r^n + u b_i r^{n-i} = 0$. En divisant par r^{n-i}, on obtient une équation de dépendance intégrale de r sur I sous la forme $r^i - c_i = 0$, pour un certain $c_i \in I^i$ qui est un produit de i monômes de I.

Ainsi, le problème de trouver une équation de dépendance intégrale d'un monôme r sur un idéal monomial I se réduit à trouver un entier i et des monômes $m_1, \dots, m_i \in I$ tels que $r^i - m_1 \cdots m_i = 0$. Grâce à cela, on peut démontrer que la clôture intégrale d'un idéal monomial est encore un idéal monomial.

Proposition A.7. *La clôture intégrale d'un idéal monomial I dans un anneau de polynômes $k[X_1, \dots, X_d]$ est un idéal monomial.*

Démonstration. Supposons par contradiction qu'il existe un élément $f \in I$ qui n'est pas un monôme et qu'aucune de ses composantes homogènes n'est dans I. Écrivons f sous la forme :

$$f = \sum_{l \in \Lambda} f_l,$$

où Λ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^d$ et où chaque f_l est une composante homogène de degré l de f. Soit $L \in \Lambda$ tel que $f_L \neq 0$.

Si k est algébriquement clos, tout automorphisme d'anneau φ de $k[X_1, \dots, X_d]$ préserve les équations de dépendance intégrale. En particulier, en choisissant des unités $u_1, \dots, u_d \in k$ et définissant l'automorphisme φ_u par $\varphi_u(X_i) = u_i X_i$, on obtient un élément g défini par $g = u_1^{L_1} \cdots u_d^{L_d} f - \varphi_u(f)$. Cet élément g appartient à la clôture intégrale de I, possède strictement moins de composantes homogènes non nulles que f, et chaque composante homogène de g est un multiple scalaire d'une composante homogène de f. Par induction, cela implique que certaines composantes homogènes de f sont dans la clôture intégrale de I, ce qui contredit le choix de f.

Soit maintenant k un corps arbitraire et soit $\bar{k}$ sa clôture algébrique. Par le cas précédent, nous savons que chaque monôme apparaissant dans f avec un coefficient non nul est intégral sur $I\bar{k}[X_1, \dots, X_d]$. Ainsi, d'après le raisonnement précédent, chaque monôme r apparaissant dans f satisfait une équation intégrale de la forme :

$$r^i - a_i = 0,$$

pour un certain a_i qui est un produit de i monômes de $I\bar{k}[X_1, \dots, X_d]$.

Par conséquent, a_i est aussi un produit de i monômes de I, ce qui implique que r est intégral sur I.

Ainsi, la clôture intégrale de I est nécessairement un idéal monomial. □

Définition A.8. Soit $A = k[X_1, \dots, X_d]$ un anneau de polynômes. Pour tout monôme $m = X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_d^{n_d}$, son *vecteur d'exposants* est donné par $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. Pour un idéal monomial I, l'ensemble de tous les vecteurs d'exposants des monômes appartenant à I est appelé *l'ensemble des exposants de I*.

Considérons l'idéal monomial $I = (X^4, XY^2, Y^3) \subset \mathbb{C}[X, Y]$. L'ensemble des exposants de I est constitué de tous les points du réseau entier qui touchent ou se trouvent dans la région grisée dans figure A.1 :

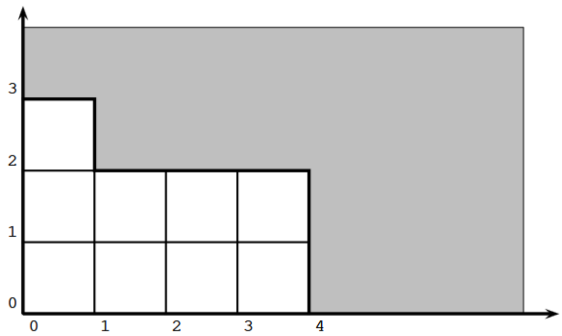

Figure A.1 – La région grisée pour l'idéal $I = (X^4, XY^2, Y^3) \subset \mathbb{C}[X, Y]$

Si G est un ensemble de générateurs monomiaux de I, alors l'ensemble des exposants de I est constitué de tous les points de $\mathbb{N}^d$ qui sont *composante par composante* supérieurs ou égaux au vecteur d'exposants de l'un des éléments de G. En d'autres termes, un monôme m appartient à un idéal monomial I si et seulement si m est un multiple d'un des générateurs monomiaux de I.

Démonstration de proposition A.5. Si un monôme $r = X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_d^{n_d}$ est intégral sur I, nous avons montré qu'il existe un entier positif i et un produit a_i de i monômes de I tel que $r^i - a_i = 0$. Un produit arbitraire a_i de i monômes dans I est de la forme $a_i = b m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_s^{k_s}$, où b est un autre monôme et où les k_j sont des entiers positifs vérifiant $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = i$. Ainsi, nous avons $r^i = b m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_s^{k_s}$.

En comparant chaque coordonnée $l = 1, \dots, d$, on obtient l'inégalité :

$$i \cdot n_l \geqslant \sum_j k_j n_{jl} \quad \textit{i.e.,} \quad n_l \geqslant \sum_j \frac{k_j}{i} n_{jl}.$$

Ainsi, le problème de déterminer les monômes $r = X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_d^{n_d}$ intégralement clos dans I revient à trouver des nombres rationnels positifs $c_1, \dots, c_d$ tels que :

$$(n_1, n_2, \dots, n_d) \geqslant \sum_j c_j (n_{j1}, n_{j2}, \dots, n_{jd}),$$

avec la condition supplémentaire :

$$\sum_j c_j = 1. \tag{A.1}$$

D'un point de vue géométrique, la construction des $(n_1, \ldots, n_d)$ satisfaisant cette inégalité est équivalente à rechercher les points entiers du réseau dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des exposants de l'idéal I. □

Nous avons donc vu ce que pouvait représenter visuellement une clôture intégrale, ce qui clôt donc notre digression sur les idéaux monomiaux.

A.3 Lemme d'Artin-Rees et Théorème d'intersection de Krull

Cette partie suit principalement la présentation du chapitre 5 de [Eis13]. On considère une suite d'idéaux multiplicative décroissante d'un anneau A,

$$A = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

telle que $I_i I_j \subset I_{i+j}$ pour tout i et tout j. (Une telle suite correponde à une filtration à valeur entière positive d'après théorème 3.17) Ou plus généralement, on considére une suite décroissante de A-sous-modules d'un A-module M telle que

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$$

et que $IM_n \subset M_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. (On appelle une telle suite une suite de I-filtration.) On dit qu'une telle suite est I-stable (avec I un idéal de R) si $IM_n = M_{n+1}$ à partir de certain rang.

Le but de cette note est de démontrer le résultat clasique sur la stabilité suivant :

Théorème A.9 (Lemme d'Artin-Rees)**.** *Soit A un anneau Noethérien, $I \subset A$ un idéal et $M' \subset M$ deux A-modules de type fini. Alors, pour toute suite de I-filtration stable de M :*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$$

la filtration induite de M' :

$$M' = M' \cap M_0 \supset M' \cap M_1 \cap M' \cap M_2 \supset \cdots$$

est aussi I-stable.

Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal, on définit **l'algèbre éclatée** de I dans A comme la A-algèbre

$$B_I A := \bigoplus_{n \geqslant 0} I^n \simeq A[tI] \subset A[t].$$

Pour une suite de I-filtration $\mathcal{J} : M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$ d'un A-module M, on définit le $B_I A$-module éclaté gradé

$$B_{\mathcal{J}} M := \bigoplus_{n \geqslant 0} M_n.$$

Proposition A.10. *Si les M_i sont de type fini, alors $\mathcal{J}$ stable $\iff$ $B_{\mathcal{J}} M$ de type fini.*

Démonstration. Si $B_{\mathcal{J}} M$ est de type fini, on peut supposer qu'il existe une famille génératrice finie contenue dans $\bigoplus_{k=0}^n M_k$. Donc pour tout $i \geqslant 0$, M_{n+i} est engemdré par les éléments de M_k avec $k \leqslant n$, et donc engendré par M_n. On conclut que $M_{n+i} = I^i M_n$, donc $\mathcal{J}$ est stable. L'assertion réciproque est évidente. □

Maintenant on peut démontrer le lemme d'Artin Rees.

Démonstration. (du théorème A.9) On observe que $B_{\mathcal{J}'} M'$ est un $B_I A$-sous-module de $B_{\mathcal{J}} M$, qui est de type fini d'après Proposition proposition A.10.

Puisque $B_I A$ est une A-algèbre de type fini et A est Noethérien, $B_I A$ est lui-memêm Noethérien. $B_{\mathcal{J}'} M'$ est ainsi de type fini. On conclut par Proposition proposition A.10. □

Théorème A.11 (Théorème d'intersection de Krull)**.** *Soit $I \subset A$ un idéal d'un anneau Noethérien et M un R-anneau de type fini. Alors il existe un élément $r \in I$ tel que*

$$(1-r)\bigcap_{j=1}^{\infty} I^j M = 0.$$

Particulièrement, si R est un anneau intègre ou local, et I est un idéal propre, alors

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} I^j = 0.$$

Démonstration. Posons $M' = \bigcap_{j=1}^{\infty} I^j M$, et on applique Lemme d'Artin-Rees A.9, on obtient qu'il existe $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $M' = M' \cap I^{p+1}M = I(M' \cap I^p M) = IM'$, donc il existe $r \in I$ tel que $(1-r)M' = 0$. (c.f. [AM94] Corollaire 2.5). $\square$

Remarque A.12. On a un résultat plus général : sous la condition du théorème A.11, le sous-module maximal de M qui est annulé par un élément de forme $1-r$ avec $r \in I$ est exactement M' : quelque soit $N \subset M$ tel que $(1-r)N = N$, on a $N = rN$. Donc $N = r^j N \subset I^j N \subset I^j M$ pour tout $j \geqslant 0$, donc $N \subset M'$.

RÉFÉRENCES

[AM94] M. F. ATIYAH et I. G. MACDONALD. *Introduction To Commutative Algebra*. Boca Raton London New York : Westview Press, 21 fév. 1994. 138 p. ISBN : 978-0-201-40751-8.

[Bou07] N. BOURBAKI. *Algèbre commutative : Chapitres 5 à 7*. Springer Science & Business Media, 2007.

[Eis13] D. EISENBUD. *Commutative algebra : with a view toward algebraic geometry*. T. 150. Springer Science & Business Media, 2013.

[Fek23] M. FEKETE. « Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten ». In : *Mathematische Zeitschrift* 17.1 (1923), p. 228-249.

[GY83] S. GOTO et K. YAMAGISHI. « Finite generation of Noetherian graded rings ». In : *Proc. of the Amer. Maths. Soc.* 89 (1983), p. 41-44.

[Huc76] J. A. HUCKABA. « The integral closure of a Noetherian ring ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 220 (1976), p. 159-166.

[Nag57] M. NAGATA. « Note on a paper of Samuel concerning asymptotic properties of ideals ». In : *Memoirs of the College of Science, University of Kyoto. Series A : Mathematics* 30.2 (1957), p. 165-175.

[Ree56] D. REES. « Valuations associated with ideals (II) ». In : *Journal of the London Mathematical Society* 1.2 (1956), p. 221-228.

[Ree88] D. REES. *Lectures on the Asymptotic Theory of Ideals*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge : Cambridge University Press, 1988. ISBN : 978-0-521-31127-4. DOI : 10.1017/CBO9780511525957.

[Sam52] P. SAMUEL. « Some asymptotic properties of powers of ideals ». In : *Annals of Mathematics* 56.1 (1952), p. 11-21.

[Sam53] P. SAMUEL. « Commutative algebra (Notes by D. Herzig) ». In : *Cornell Univ* (1953).

[SH06] I. SWANSON et C. HUNEKE. *Integral Closure of Ideals, Rings and Modulos*. T. 13. Cambridge University Press, 2006.