Filtrations et Lemme d'Artin-Rees

YE Xiaowei

July 25, 2024

Abstract

Dans cette note, on parle des résultats fondamentaux des filtrations.

On va présenter les anneaux et les modules gradés associés à une filtration, ainsi que les algèbres éclatées ($blowup\ algebra$ en anglais) et on va démontrer Lemme d'Artin-Rees. Comme application, on va démontrer le théorème d'intersection de Krull et on verra quelques exemples. Cette note suit principalement la présentation du chapitre 5 de [GTM150].

1 Définitions Nécessaires

On considère une **filtration multiplicative décroissante** d'un anneau R, c'est-à-dire une suite d'ideaux

$$R = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

telle que $I_iI_j \subset I_{i+j}$ pour tout i et tout j.

Un exemple de filtration multiplicative décroissante est $I_i = I^i$ pour certain idéal propre de R, cette filtration est appelée **la filtration I-adique**.

On peut aussi définir une **filtration d'un R-module** M comme une suite décroissante de R-modules

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$$

telle que $IM_n \subset M_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. On dit que cette filtration est **I-stable** (ou simplement stable s'il y a pas de confusion) si $IM_n = M_{n+1}$ à partir de certain rang.

Remarque 1.1. Le mot $module$ est un nom masculin même s'il y a la lettre e à la fin!

Le but de cette note est de démontrer le résultat clasique sur la stabilité suivant:

Théorèm 1.2 (Lemme d'Artin-Rees)**.** *Soit R un anneau Noethérien, $I \subset R$ un idéal et $M' \subset M$ deux R-modules de type fini. Alors, pour toute filtration I-stable de M:*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$$

la filtration induite de M':

$$M' = M' \cap M_0 \supset M' \cap M_1 \cap M' \cap M_2 \supset \cdots$$

est aussi I-stable.

On va donner une démonstration après avoir introduit les constructions des anneaux et modules gradés associés et des algèbres éclatés. On peut consulter [Hun92] pour une version uniforme (c'est-à-dire le rang de stabilité ne dépend pas du choix d'idéal sous certaines conditions) de ce résultat.

2 Anneaux et Modules Gradés Associés

Étant donné un anneau R avec son idéal I, on peut définir **l'anneau gradé associé** à R par rapport à I, noté

$$\mathrm{gr}_I R := \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n / I^{n+1}.$$

Exercice 2.1. Vérifier que la multiplication par envoyer $(a, b) \in I^m/I^{m+1} \times I^n/I^{n+1}$ représenté par $(a', b') \in I^m \times I^n$ à la classe de $a'b'$ dans I^{m+n}/I^{m+n+1} est bien définie.

Plus généralement, pour une I-filtration dún R-module M;

$$\mathcal{J} : M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots ,$$

on définit **le module gradé associé** à $\mathcal{J}$:

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{J}} M := \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n / M_{n+1}.$$

Ce module admet automatiquement une structure de $\mathrm{gr}_I R$-module. L'action de $a \in I^m/I^{m+1}$ sur $b \in M_n/M_{n+1}$ est juste la classe de $a'b'$ dans M_{m+n}/M_{m+n+1}, où $a' \in I^m$ et $b' \in M_n$ représente a et b respectivement. Pour la suite, on écrit simplement $\mathrm{gr}M$ au lieu de $\mathrm{gr}_{\mathcal{J}} M$ s'il n'y a pas de confusion.

En utilisant cette notion, on peut maintenant expliquer l'importance de stabilité:

Proposition 2.2. *Si tous les modules dans une filtration stable $\mathcal{J}$ sont de type fini, alors* $\mathrm{gr}_{\mathcal{J}} M$ *est de type fini autant qu'un* $\mathrm{gr}_I R$*-module.*

Preuve: La stabilté assure que

$$\exists N, \forall n \geq N, IM_n = M_{n+1},$$

cela implique que $(I/I^2)(M_n/M_{n+1}) = M_{n+1}/M_{n+2}, \forall n \geq N$. Donc $\mathrm{gr}_{\mathcal{J}} M$ est engendré par les M_i avec $0 \leq i \leq N$, qui sont de type fini, il est donc de type fini. □

Pour une filtration

$$\mathcal{J} : M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots,$$

on peut définir une application $\mathrm{in} : M \to \mathrm{gr} M$, appelée **la forme initiale**, comme:

$$\mathrm{in}(f) = \begin{cases} f \mod M_{m+1} & si \quad f \in M_m \setminus M_{m+1} \\ 0 & si \quad f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} M_m \end{cases}.$$

En général, cette application n'est pas un homomorphisme, mais elle a quand même des propriétés intéressantes.

Proposition 2.3. *Pour tout* $f, g \in M$, *on a* $\mathrm{in}(f+g) \in \{\mathrm{in}(f) + \mathrm{in}(g), \mathrm{in}(f), \mathrm{in}(g)\}$ *ou* $\mathrm{in}(f) + \mathrm{in}(g) = 0$. *Si* $M = R$ *et* $\mathcal{J}$ *est une filtration multiplicative, alors* $\mathrm{in}(f)\mathrm{in}(g) = \mathrm{in}(fg)$ *ou* $\mathrm{in}(f)\mathrm{in}(g) = 0$.

Preuve: Il suffit de considérer le cas où $\mathrm{in}(f) \neq 0$ et $\mathrm{in}(g) \neq 0$. Soit $f \in M_m \setminus M_{m+1}$ et $g \in M_n \setminus M_{n+1}$. Il y a trois cas:

- Si $m = n$ et $f + g \in M_{n+1}$, alors $\mathrm{in}(f) + \mathrm{in}(g) = 0$.
- Si $m = n$ et $f + g \notin M_{n+1}$, alors $\mathrm{in}(f+g) = (f+g)(\mod M_{n+1}) = \mathrm{in}(f) + \mathrm{in}(g)$.
- Si $m \neq n$, on peut supposer sans perte de généralité que $m > n$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{in}(f+g) &= (f+g)(\mod M_{n+1}) \\ &= f(\mod M_{n+1}) + g(\mod M_{n+1}) \\ &= \mathrm{in}(g) \end{aligned}$$

Remarque 2.4. Il y a une erreur dans le résultat de l'exercice 5.1 de [GTM150], le troisième situation est oubliée.

Pour le cas $M = R$, on a deux cas selon $fg \in M_{n+m+1}$ ou pas, les deux cas sont simple. □

3 L'algèbre Éclatée

Soit R un anneau et $I \subset R$ un idéal, on définit **l'algèbre éclatée** de I dans R comme la R-algèbre

$$B_I R := \bigoplus_{n \geq 0} I^n \simeq R[tI] \subset R[t].$$

On a $B_I R / I B_I R = \mathrm{gr}_I R$. Pour une I-filtration d'un R-module M

$$\mathcal{J} : M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$$

on définit le $B_I R$-module éclaté gradé

$$B_{\mathcal{J}} M := \bigoplus_{n \geq 0} M_n.$$

Proposition 3.1. *Si les M_i sont de type fini, alors $\mathcal{J}$ stable $\iff$ $B_{\mathcal{J}} M$ de type fini.*

Preuve: Si $B_{\mathcal{J}} M$ est de type fini, on peut supposer qu'il existe une famille génératrice finie contenue dans $\bigoplus_{k=0}^{n} M_k$. Donc pour tout $i \geq 0$, M_{n+i} est engemdré par les éléments de M_k avec $k \leq n$, et donc engendré par M_n.

On conclut que $M_{n+i} = I^i M_n$, donc $\mathcal{J}$ est stable.

L'assertion réciproque est évidente. $\square$

Maintenant on peut démontrer le lemme d'Artin Rees.

Preuve: (du Théorème 1.2) On observe que $B_{\mathcal{J}'} M'$ est un $B_I R$-sous-module de $B_{\mathcal{J}} M$, qui est de type fini d'après Proposition 3.1.

Puisque $B_I R$ est une R-algèbre de type fini et R est Noethérien, $B_I R$ est lui-memêm Noethérien. $B_{\mathcal{J}'} M'$ est ainsi de type fini. On conclut par Proposition 3.1. $\square$

4 Théorème d'Intersection de Krull

Théorèm 4.1 (Théorème d'intersection de Krull)**.** *Soit $I \subset R$ un idéal d'un anneau Noethérien et M un R-anneau de type fini. Alors il existe un élément $r \in I$ tel que*

$$(1 - r) \bigcap_{j=1}^{\infty} I^j M = 0.$$

Particulièrement, si R est un anneau intègre ou local, et I est un idéal propre, alors

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} I^j = 0.$$

Preuve: Posons $M' = \bigcap_{j=1}^{\infty} I^j M$, et on applique Lemme d'Artin-Rees 1.2, on obtient qu'il existe $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que

$$\begin{aligned} M' &= M' \cap I^{p+1}M \\ &= I(M' \cap I^p M) \\ &= IM', \end{aligned}$$

donc il existe $r \in I$ tel que $(1-r)M' = 0$. (c.f. [AM69] Corollaire 2.5). □

Remarque 4.2. On a un résultat plus général: sous la condition du théorème 4.1, le sous-module maximal de M qui est annulé par un élément de forme $1-r$ avec $r \in I$ est exactement M': quelque soit $N \subset M$ tel que $(1-r)N = N$, on a $N = rN$. Donc $N = r^j N \subset I^j N \subset I^j M$ pour tout $j \geq 0$, donc $N \subset M'$.

Corollaire 4.3. *Soit R un anneau Noethérien local et I un idéal propre. Alors R est intègre si* $\mathrm{gr}_I R$ *l'est.*

Preuve: Si $fg = 0$ dans R, on a $\mathrm{in}(f)\mathrm{in}(g) = 0$ d'après Propositon 2.3, donc on peut supposer sans perte de généralité que $\mathrm{in}(f) = 0$. C'est-à-dire

$$f \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I^i = 0.$$

□

5 Exemple: Le germe des fonctions lisses

Dans cette section, on prend $R = C^{\infty}(\mathbb{R})/\sim$ et $I = (x)$, où $f \sim g \iff f = g$ sur un voisinage de 0.

On a $I = \{f \in R : f(0) = 0\}$: si $f \in C^{\infty}$ et $f(0) = 0$, alors

$$\frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(ux)\mathrm{d}x$$

est aussi de classe C^{∞}.

Exercice 5.1. montrer que (R, I) est un anneau local.

Une observation:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$$

cet exemple montre que dans Théorème 4.1 la condition que R soit Noethérien est nécessaire. C'est aussi le cas pour Corollaire 4.3: on peut vérifier que dans R,

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

ont pour produit 0 mais

Exercice 5.2. $\mathrm{gr}_I R = \mathbb{R}[x]$ est bien intègre.

References

[AM69] M. F. Atiyah, and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[GTM150] D. Eisenbud, *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlag, 1995.

[Hun92] C. Huneke, *Uniform bounds in noetherian rings*, Invent. math. 107 (1992), 203–223.