习题集锦

叶骁炜

1. 沿方向收敛与收敛的关系

设 $f:\mathbb{R}^2\to R$ 是函数。

1. 若 f 在 $(0,0)$ 处连续，则对于任意的 $k\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ 存在且取值不依赖于 k。

（注：收敛 $\implies$ 沿方向收敛，反之不对，下一小问将给出一个反例。）

2. 考虑如下函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

（i）验证：对于任意的 $k\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ 存在且取值不依赖于 k。

（ii）考虑曲线 $x=y^3$，证明 $f(x,y)$ 在原点处不连续。

解答： （i）对于任意的 $k\in\mathbb{R}$，当 $x\to 0$ 时，有

$$f(x,kx)=\frac{k^3x^2}{1+k^6x^4}\to 0.$$

（ii）若 $f(x,y)$ 在原点处连续，应有 $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)=0$，又应有

$$\lim_{x,y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(y^3,y)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

矛盾！故 $f(x,y)$ 在原点处不连续。

2. 有限增量定理

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是连通开集， $f:U\to R$ 是连续可微函数，满足 $||\nabla f||$ 有界，记

$$M:=\sup_{x\in U}||\nabla f(x)||.$$

1. 先考虑 $n=1, U=(a,b)\subset\mathbb{R}$ 为开区间的简单情形，证明：

$$\forall x,y\in(a,b), |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|,$$

即 f 是 M-Lipschitz 的。

证明. 由Newton-Lebniz公式，

$$|f(x)-f(y)|=\left|\int_y^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_{\min\{x,y\}}^{\max\{x,y\}}|f'(t)|\mathrm{d}t$$
$$\leq M|x-y|.$$

□

2. 当 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是凸集时，将上述结论推广到 $n \geq 2$ 的情形（有限增量定理）。

证明. 由Newton-Lebniz公式，

$$|f(x)-f(y)| = \left| \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f((1-t)x+ty)\mathrm{d}t \right| = \left| \int\limits_0^1 \nabla f \cdot (y-x)\mathrm{d}t \right|$$

$$\leq \int\limits_0^1 ||\nabla f|| \cdot ||y-x||\mathrm{d}t \leq M||x-y||.$$

□

3. 考虑 $n=2, U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, x^2+y^2>1\}$，令

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x},$$

（i）验证 $\forall x \in U, ||\nabla f(x)|| \leq 1$。

证明. 计算偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

于是

$$||\nabla f|| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1.$$

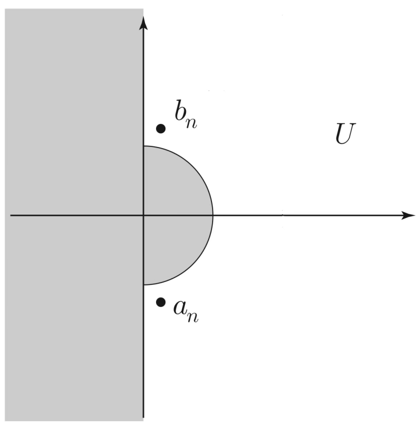
□

（ii）证明：f 不是 1-Lipschitz 的。这表明：有限增量定理的条件中，关于定义域凸性的假设必不可少。

证明. 取点列

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{n+1}{n}\right), \quad b_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right),$$

则有 $||a_n-b_n|| \to 2$ 但 $|f(a_n)-f(b_n)| = 2\arctan(n+1) \to \pi$, 不可能总满足 $|f(x)-f(y)| \leq ||x-y||$. □



（iii）证明：f 是 $\frac{\pi}{2}$-Lipschitz 的。

提示：对于 U 中无法用线段相连的两点，可以用一条半圆弧将它们相连。沿此半圆积分，用Newton-Lebniz公式。

4. 能否构造一个例子（U 更坏一些），使得$||\nabla f||$ 有界但 f 不是Lipschitz 的?

提示：考虑极坐标表示下的如下区域:

$$U = \{(r, \theta) : 1 < r < 2, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

令 $f : U \to \mathbb{R}, (r, \theta) \mapsto \theta.$

3. 行列式映射的微分

考虑行列式映射 $\det : M_n(\mathbb{R}) \to R, A \mapsto \det(A)$。

1. 证明：det 是连续可微映射。

2. 证明：在 $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ 处，det 的微分为 $H \mapsto \mathrm{tr}(H)$，其中 $\mathrm{tr}(H)$ 表示矩阵 H 的迹。

3. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 可逆，证明：det 在 A 处的微分为 $H \mapsto \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}H)$。

4. 对于一般情形，有

$$\mathrm{d}\det{}_A(H) = \mathrm{tr}(\tilde{A}H),$$

其中 $\tilde{A}$ 表示 A 的伴随矩阵（代数余子阵）。

参考阅读材料：Jacques Lafontaine. *An Introduction to Differential Manifolds*. Springer出版社, Page9.

4. 2维版本Morse引理的一种特殊情况

来自一位同学的提问，系往年原题。设 $f \in C^3(B_1^2(0))$ 满足 $f(0,0) = 0$。

1. 证明：存在 $g_1, g_2 \in C^2(B_0^2(1))$ 满足

$$f(x, y) = xg_1(x, y) + yg_2(x, y).$$

提示：验证

$$g_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)\mathrm{d}t, g_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)\mathrm{d}t$$

满足要求。

2. 又设 $\nabla f(0, 0) = 0$，且

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} < 0,$$

证明：在原点的一个邻域内存在一个坐标变换 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 使得

$$f(x(u, v), y(u, v)) = u^2 - v^2.$$

证明步骤概要:

第一步：对 g_1、g_2 再运用第一小问的结论，并证明 $g_{12}=g_{21}$，从而存在对称阵 $G(X)$ 使得 $F(X)=X^TGX$，其中 $X=(x,y)$。

第二步：由线性代数基础知识得，存在 $P\in GL_2(\mathbb{R})$，满足 $P^TG(0,0)P=\mathrm{diam}(1,-1)$。

第三步：证明在原点附近有矩阵值函数 $Q(x,y)$，满足

$$(Q(x,y)^{-1})^TP^TG(x,y)PQ^{-1}=\mathrm{diam}(1,-1).$$

这等价于 $Q^T\mathrm{diam}(1,-1)Q=P^TGP$。

为此，考虑映射 $F:Up_2(\mathbb{R})\times Sym_2(\mathbb{R})\to Sym_2(\mathbb{R}),(G,Q)\mapsto Q^T\mathrm{diam}(1,-1)Q-P^TGP$，其中 $Up_2(\mathbb{R})$ 表示所有2阶上三角阵全体，相当于 $\mathbb{R}^3$；而 $Sym_2(\mathbb{R})$ 表示所有2阶对称矩阵全体，也相当于 $\mathbb{R}^3$。

我们证明在 $(G(0,0),I_2)$ 这个 F 的零点附近，上面的式子给出 Q 关于 G 的隐函数。为此，我们想运用**隐函数定理**，故只需证明 F 在点 $(G(0,0),I_2)$ 处关于 Q 的偏微分

$$Up_2(\mathbb{R})\to Sym_2(\mathbb{R}),H\mapsto H^T\mathrm{diam}(1,-1)+\mathrm{diam}(1,-1)H$$

是可逆的。这是不难验证的。

第四步：坐标变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=Q(G(x,y))P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

满足要求。

注：这个结论是所谓Morse引理的一种2维情形，感兴趣的同学可以参考Serge Lang所著《Introduction to Differential Manifolds》的第7章，第5节。

5. 不存在圆盘到圆周的收缩

记平面上的单位圆盘为 $\mathbb{D}^2:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_1^2+x_2^2\le 1\}$，其边界为单位圆周，即 $S^1:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:x_1^2+x_2^2=1\}$。

定理 5.1. 不存在连续映射 $f:\mathbb{D}^2\to S^1$ 满足其在圆周上的限制 $f|_{S^1}=id$ 为恒等映射。

这个定理的证明需要一点代数拓扑的知识，超出我们课程的范围。我们来用所学知识证明如下较弱的版本：

定理 5.2. 不存在 C^1 映射 $f:\mathbb{D}^2\to S^1$ 满足其在圆周上的限制 $f|_{S^1}=id$ 为恒等映射。即，不存在连续可微函数 $f_1,f_2:\mathbb{D}^2\to\mathbb{R}$，满足 $f_1^2+f_2^2\equiv 1$ 且当 $x_1^2+x_2^2=1$ 时总有 $f_1(x_1,x_2)=x_1$，$f_2(x_1,x_2)=x_2$。

我们将这个定理的证明分为如下几个步骤：假设存在这样的 f_1,f_2，

步骤一：证明 $\mathrm{d}f_1\wedge\mathrm{d}f_2=0$；

证明：由 $f_1^2+f_2^2\equiv 1$ 有 $f_1\mathrm{d}f_1+f_2\mathrm{d}f_2=0$，于是 $\mathrm{d}f_1,\mathrm{d}f_2$ 线性相关，从而 $\mathrm{d}f_1\wedge\mathrm{d}f_2=0$。

步骤二：利用Stokes定理证明

$$\int_{S^1}f_1\mathrm{d}f_2=0;$$

证明：注意到 $\mathrm{d}(f_1\mathrm{d}f_2)=\mathrm{d}f_1\wedge\mathrm{d}f_2=0$，由Stokes定理有

$$0=\iint_{\mathbb{D}}\mathrm{d}(f_1\mathrm{d}f_2)=\int_{\partial\mathbb{D}=S^1}f_1\mathrm{d}f_2.$$

步骤三：直接计算得到

$$\int_{S^1}f_1\mathrm{d}f_2=\pi\neq 0$$

从而得到矛盾。

证明：当 $x_1^2+x_2^2=1$ 时总有 $f_1(x_1,x_2)=x_1$，$f_2(x_1,x_2)=x_2$，从而

$$\int_{S^1}f_1\mathrm{d}f_2=\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\sin\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi.$$

6. 两种证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

证法一：

1. 设 $n\geq 1$ 是正整数，求证：

$$\frac{1}{n^2}=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

证明：反复用分部积分公式

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t&=\frac{1}{n}\sin(nt)\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\mathrm{d}t\\&=-\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n^2}\cos(nt)\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{\pi n^2}\cos(nt)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

2. 设 $t\notin 2\pi\mathbb{Z}$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}.$$

3（Riemann-Lebesgue引理）. 求证：

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{\pi}g(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t=0,$$

其中，

$$g(t)=\frac{\frac{1}{2\pi}t^2-t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

注记：综合习题5.2。用分部积分即可证明。

4. 完成证明。

证明：我们有

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$\to-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}t^2-t\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}$$

证法二：

1. 对任意 $m\in\mathbb{Z}$，$0<\delta<\frac{1}{2}$，函数项级数

$$S(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n)^2}$$

在区间 $[m+\delta,m+1-\delta]$ 上一致收敛。

2. 假设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 以 1 为周期，且存在 $\alpha>2$ 满足

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=\alpha f(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

则 $f\equiv 0$。

证明：取 $x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|$ 最大，则

$$\alpha|f(x_0)|=\left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)+f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right|\le\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\le 2|f(x_0)|$$

于是 $|f(x_0)|=0$，从而 $f\equiv 0$。

3. 证明等式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)},x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

证明：考虑函数

$$f(x)=S(x)-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)},$$

利用正弦函数Taylor展开式验证 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，从而 f 可视为在 $\mathbb{R}$ 上连续。注意到 f 以 1 为周期，且满足

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=4f(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

从而由2，$f\equiv 0$。

4. 令 $x=\frac{1}{2}$，得到结论。

注：利用复分析的知识我们能够证明：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}=0,z\in\mathbb{C}.$$

再注：学习了傅里叶分析的知识后，我们便得到第三种证明，详见第二册课本例12.1.1。

7. 极大值原理

定理 7.1. 设在有界区域 U 上有连续到边的光滑函数 u 满足 $\triangle u \geq 0$（*resp.* $u \leq 0$），则 u 在边界取最大（*resp.* 小）值。

步骤一：若 $\triangle u > 0$，用反证法，假设 u 在内部 x_0 处取到最大值，则它也是极大值点。从而有

$$0 \geq \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u(x+te_i)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

于是

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \triangle u > 0$$

矛盾！

步骤二：对一般情况，考虑 $u_\varepsilon := u + \varepsilon x_1^2$，验证 $\triangle u_\varepsilon > 0$，应用上一步结论，得到

$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\bar{U}} u_\varepsilon \leq \max_{\partial U} u_\varepsilon \leq \max_{\partial U} u + \varepsilon \max_{\partial U} x_1^2$$

然后另 $\varepsilon \to 0$ 即可。

8. 等周不等式

设 C 是平面上的分段光滑简单闭曲线，长度为 l，围成区域面积为 A，则 $l^2 \geq 4\pi A$。等号成立当且仅当 C 是圆周。**提示**：按以下步骤证明：

1. （Wirtinger不等式）设分段光滑函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 以 2π 为周期，且

$$\int_0^{2\pi} f(s)\mathrm{d}s = 0,$$

则有

$$\int_0^{2\pi} f(s)^2 \mathrm{d}s \leq \int_0^{2\pi} f'(s)^2 \mathrm{d}s.$$

提示：将 f 展开为 Fourier级数。

2. 不妨假设 $l = 2\pi$ 且 C 的质心在原点处。取 C 的弧长参数化 $(c_1(s), c_2(s))$。证明：

$$\int_C r^2 \leq 2\pi.$$

3. 验证 $\mathrm{div}\overrightarrow{r} = 2$，从而由散度定理

$$2A = \int_A \mathrm{div}\overrightarrow{r} = \int_C (r, n)$$

4. 得到结论。

9. 一个级数的计算

目标：证明级数 $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ 在 $\mathbb{R}$ 收敛并求极限值，其中

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\right).$$

（1）验证：可以用Lebniz判别法判断收敛性。

（2）设 $g(x)=\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$，用第一册课本定理7.41证明其在 $[0,1]$ 上连续，并验证

$$\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}=\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)\left(\sum_{n\geq 0}(-x)^n\right)=\sum_{n\geq 0}(n+1)a_nx^n.$$

（3）证明：

$$xg(x)=\int_0^x\frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$$

（4）级数和为

$$g(1)=\int_0^1\frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{2\arctan u}{(1+u^2)}\mathrm{d}u=\frac{\pi^2}{16}.$$

10. 其他练习题

习题 10.1. 设 $f:D:=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 有连续的二阶偏导，求积分

$$\iint_D\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解答：由Newton-Lebniz公式，有

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int\limits_c^d\mathrm{d}y\int\limits_a^b\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\\&=\int\limits_c^d\left(\frac{\partial f(b,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(a,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\&=f(b,d)-f(b,c)-f(a,d)+f(a,c).\end{aligned}$$

习题 10.2. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续，求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解答：我们证明

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(0,0).$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-f(0,0)\right|&=\frac{1}{\pi r^2}\left|\iint_{x^2+y^2\leq r^2}(f(x,y)-f(0,0))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\&\leq\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\leq r^2}|f(x,y)-f(0,0)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon>0$，由连续性，存在 $\delta>0$，满足

$$r<\delta\implies\forall(x,y)\text{满足}x^2+y^2\leq r^2,|f(x,y)-f(0,0)|\leq\varepsilon,$$

故当 $r<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - f(0,0)\right| \le \frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2} |f(x,y)-f(0,0)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \varepsilon.$$

由 ε 任意性，得

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(0,0).$$

习题 10.3. 求证：

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \left(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2.$$

证明：首先计算左边的表达式，

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_0^1 \mathrm{d}r\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta r e^{r^2}\\ &= 2\pi\int\limits_0^1 r e^{r^2}\mathrm{d}r\\ &= \pi\ e^{r^2}\Big|_0^1 = \pi(e-1).\end{aligned}$$

于是只要证明

$$\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\mathrm{d}x \ge \sqrt{\pi(e-1)}$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\mathrm{d}x &\ge \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{\pi}\left(1+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi^2}{160}\right) > \sqrt{\pi(e-1)}.\end{aligned}$$

注：习题课上，一位同学指出：右边的表达式事实上可化为

$$\left(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \iint_{\left[-\frac{\sqrt{\pi}}{2},\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^2} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这样便可得到一个更简单的证明。

习题 10.4. 判断级数

$$\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n-1}(x+1)x^n}{n}$$

在 $[-1,1]$ 上是否一致收敛。

解答：一致收敛。$(-1)^{n-1}(x+1)x^n$ 部分和一致有界，$\frac{1}{n}$ 单调减一致趋于零，用函数项级数Dirichlet判别法。

习题 10.5. 判断级数

$$\sum_{n\ge 1}\frac{(x-1)^2}{n^x}$$

在 $(1,+\infty)$ 上是否一致收敛。

解答：一致收敛。

令
$$u_n(x) = \frac{(x-1)^2}{n^x},$$
求 $a_n = \sup\limits_{x>1} u_n(x)$：
$$u_n'(x) = \frac{x-1}{n^x}(2-(x-1)\ln n),$$
得到
$$a_n = u_n\left(1+\frac{2}{\ln n}\right) = \frac{4}{(\ln n)^2 n^{1+\frac{2}{\ln n}}} = \frac{4}{e^2}\frac{1}{n(\ln n)^2}.$$
用正项数项级数积分判别法可以证明 $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ 收敛（第一册课本例7.1.9），然后应用函数项级数Weierstrass判别法。

习题 10.6. 设 $A>0$，讨论函数项级数
$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$$
在闭区间 $[-A,A]$ 上的一致收敛性。

解答：一致收敛。

我们能够证明：当 $|x|<1$ 时有
$$|x-\sin x| \leq |x|^3$$
于是当 $n>A$ 时，
$$\left|\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right| \leq \frac{A^3}{n^3}, \forall x\in[-A,A].$$

习题 10.7. 判断级数
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(\ln(1+n))^{\ln(1+n)}}$$
的敛散性。

解答：收敛。

我们有
$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{(\ln(1+n))^{\ln(1+n)}} \leq \frac{2^k}{(\ln(1+2^k))^{\ln(1+2^k)}} \leq \frac{2^k}{(k\ln 2)^{k\ln 2}}$$

习题 10.8. 求证：由参变量积分定义的函数
$$f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+(x+t)^2}$$
在 $[0,+\infty)$ 上 C^2 且满足微分方程
$$f''(x)+f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

解答：两次应用分部积分公式。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos t \mathrm{d}t}{1+(x+t)^2} \\
&= \frac{\sin t}{1+(x+t)^2}\bigg|_0^{\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \sin t \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1+(x+t)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \cos t \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1+(x+t)^2}\right)\bigg|_0^{\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \cos t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{1+(x+t)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2x}{(1+x^2)^2} - \int\limits_0^{+\infty} \cos t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{1+(x+t)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2x}{(1+x^2)^2} - f''(x).
\end{aligned}
$$

习题 10.9. 正项级数 $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ 收敛，试判断级数 $\sum\limits_{n\geq 3} a_n^{\frac{n-3}{n}}$ 的敛散性。

解答：收敛。

若 $a_n \leq 2^{-\frac{n}{3}}$，则 $a_n^{\frac{n-3}{n}} \leq 2\cdot 2^{-\frac{n}{3}}$；

若 $a_n \geq 2^{-\frac{n}{3}}$，则 $a_n^{\frac{n-3}{n}} \leq 2a_n$。

综上，我们用两个收敛级数控制了原级数：$a_n \leq 2\cdot 2^{-\frac{n}{3}} + 2a_n$。

习题 10.10. 证明级数

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，并证明它无处绝对收敛。

习题 10.11. 计算级数

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n+(1-x)^n}{n^2}, x\in(0,1).$$

解答：逐项求导

$$u_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{n} - \frac{(1-x)^n}{n}$$

于是

$$g'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x}$$

故

$$g(x) = -\ln x\ln(1-x) + C, C = g(0) = \frac{\pi^2}{6}.$$